**Historia de la Investigación Operativa**

A lo largo de la historia es frecuente encontrarse con la colaboración entre científicos y militares con el fin de dictaminar la decisión óptima en la batalla. Es por esto que muchos expertos consideran el inicio de la Investigación Operativa en el siglo III A.C., durante la II Guerra Púnica, con el análisis y solución que Arquímedes propuso para la defensa de la ciudad de Siracusa, sitiada por los romanos. Entre sus inventos se encontraban la catapulta, y un sistema de espejos con el que incendiaba las embarcaciones enemigas al enfocarlas con los rayos del sol.

En 1503, Leonardo da Vinci participó como ingeniero en la guerra contra Pisa ya que conocía técnicas para realizar bombardeos, construir barcos, vehículos acorazados, cañones, catapultas, y otras máquinas bélicas.

Otro antecedente de uso de la Investigación Operativa se debe a F. W. Lanchester, quien hizo un estudio matemático sobre la potencia balística de las fuerzas opositoras y desarrolló, a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales, la Ley Cuadrática de Combate de Lanchester, con la que era posible determinar el desenlace de una batalla militar.

Thomas Edison también hizo uso de la Investigación Operativa, contribuyendo en la guerra antisubmarina, con sus grandes ideas, como la protección anti-torpedos para los barcos.

Desde el punto de vista matemático, en los siglos XVII y XVIII, Newton, Leibnitz, Bernoulli y Lagrange, trabajaron en obtener máximos y mínimos condicionas de ciertas funciones. El matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier esbozó métodos de la actual programación lineal. Y en los últimos años del siglo XVIII, Gaspar Monge asentó los precedentes del Método Gráfico gracias a su desarrollo de la Geometría Descriptiva.

Janos Von Neumann publicó en 1928 su trabajo "Teoría de Juegos", que proporcionó fundamentos matemáticos a la Programación Lineal. Posteriormente, en 1947, visionó la similitud entre los problemas de programación lineal y la teoría de matrices que desarrolló.

En 1939, el matemático ruso L. Kantorovich, en colaboración con el matemático holandés T. Koopmans, desarrolló la teoría matemática llamada "Programación Lineal", por la que les fue concedido el premio Nobel.

A finales de los años 30 y principios de los 40, George Joseph Stigler planteó un problema particular conocido como régimen alimenticio optimal o más comúnmente conocido como problema de la dieta, que surgió a raíz de la preocupación del ejército americano por asegurar unos requerimientos nutricionales al menor coste para sus tropas. Fue resuelto mediante un método heurístico cuya solución difería tan sólo unos céntimos de la solución aportada años más tarde por el Método Simplex.

Durante los años 1941 y 1942, Kantorovich y Koopmans estudiaron de forma independiente el problema del transporte por primera vez, conociéndose este tipo de problemas como problema de Koopmans-Kantorovich. Para su solución, emplearon métodos geométricos que están relacionados con la teoría de convexidad de Minkowski.

Pero no se considera que ha nacido una nueva ciencia llamada Investigación Operativa o Investigación de Operaciones hasta la II Guerra Mundial, durante la batalla de Inglaterra, donde la Fuerza Aérea Alemana, es decir la Luftwaffe, estaba sometiendo a los británicos a un duro ataque aéreo ya que estos tenían una capacidad aérea pequeña, aunque experimentada en el combate. El gobierno británico, buscando algún método para defender su país, convocó a varios científicos de diversas disciplinas para tratar de resolver el problema de sacar el máximo beneficio de los radares de que disponían. Gracias a su trabajo determinando la localización óptima de las antenas y la mejor distribución de las señales consiguieron duplicar la efectividad del sistema de defensa aérea.

Al apreciar el alcance de ésta nueva disciplina, Inglaterra creó otros grupos de la misma índole para obtener resultados óptimos en la contienda. Al igual que Estados Unidos (EEUU), al unirse a la Guerra en 1942, creando el proyecto SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs), donde se encontraba trabajando George Bernard Dantzig, quien desarrolló en 1947 el algoritmo del método Simplex.

Durante la Guerra Fría, la antigua Unión Soviética (URRS), excluida del Plan Marshall, quiso controlar las comunicaciones terrestres, incluyendo rutas fluviales, de Berlín. Para evitar la rendición de la ciudad, y su sumisión a formar parte de la zona comunista alemana, Inglaterra y Estados Unidos decidieron abastecer la ciudad, o bien mediante convoyes escoltados (lo que podría dar lugar a nuevos enfrentamientos) o mediante puente aéreo, rompiendo o evadiendo en cualquier caso el bloqueo de Berlín. Se optó por ésta segunda opción, iniciando la Luftbrücke (puente aéreo) el 25 de junio de 1948. Éste fue otro de los problemas en los que participó el grupo SCOOP, en diciembre de ese mismo año se conseguía abastecer con 4500 toneladas diarias, y tras estudios de Investigación Operativa se optimizó el abastecimiento hasta llegar a las 8000~9000 toneladas diarias en marzo de 1949. Ésta cifra era la misma que se hubiera transportado por medios terrestres, por lo que los soviéticos decidieron levantar el bloqueo el 12 de mayo de 1949.

Tras la Segunda Guerra Mundial, la organización de los recursos de Estados Unidos (EEUU) (energía, armamentos, y todo tipo de suministros) se estimó oportuno realizarla mediante modelos de optimización, resueltos mediante la programación lineal.

Al mismo tiempo, que se desarrolla la doctrina de la Investigación Operativa, se desarrollan las técnicas de computación y ordenadores, gracias a los cuales se redujo el tiempo de resolución de los problemas.

El primer resultado de estas técnicas fue dado en el año 1952, cuando se usó un ordenador SEAC del National Bureau of Standars para obtener la solución de un problema. El éxito en el tiempo de resolución fue tan alentador que de inmediato se usó para todo tipo de problemas militares, como determinar la altura óptima a la que deberían volar los aviones para localizar los submarinos enemigos, gestión de fondos monetarios para logística y armamento, e incluso determinar la profundidad a la que se debían enviar las cargas para alcanzar los submarinos enemigos de forma que causara el mayor número de bajas, que se tradujo en un aumento de hasta cinco veces en la eficacia de la fuerza aérea.

Durante las décadas de los 50 y 60, crece el interés y el desarrollo de la Investigación Operativa, debido a su aplicación en el ámbito del comercio y la industria. Sirva de ejemplo, el problema del cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú, en los que había 10 puntos de origen y 230 de destino. Para resolverlo, se usó un ordenador Strena, que empleó 10 días en el mes de junio de 1958, y tal solución aportó una reducción del 11% de los gastos respecto a los costes originales.

En 1958 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo del transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador Strena en 10 días del mes de junio, redujo un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Anteriormente ya se habían planteado éstos problemas en una disciplina conocida como Investigación de Empresas o Análisis de Empresas, que no disponían de métodos tan efectivos como los desarrollados durante la Segunda Guerra Mundial (por ejemplo el Método Simplex). Las aplicaciones no bélicas de la Investigación Operativa se extienden tanto como se imagine, con problemas que van desde la alimentación, ganadería, distribución de campos de cultivo en agricultura, transporte de mercancías, localización, distribución de personal, problemas de redes, colas, grafos, etc

**Casos reales de uso de la Investigación Operativa**

La siguiente tabla muestra algunos casos reales de organizaciones que han hecho uso de la Investigación Operativa y las ganancias y/o ahorros conseguidos a raíz de ello

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Organización** | **Aplicación** | **Año** | **Ahorros anuales** |
| The Netherlands Rijkswaterstaat | Desarrollo de la política nacional de administración del agua, incluyendo mezcla de nuevas instalaciones, procedimientos de operaciones y costeo | 1985 | $15 millones |
| Monsanto Corp. | Optimización de las operaciones de producción para cumplir metas con un costo mínimo | 1985 | $2 millones |
| Weyerhauser Co. | Optimización del corte de árboles en productos de madera para maximizar su producción | 1986 | $15 millones |
| Electrobas/CEPAL Brasil | Asignación óptima de recursos hidráulicos y térmicos en el sistema nacional de generación de energía | 1986 | $43 millones |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| United Airlines | Programación de turnos de trabajo en oficinas de reservaciones y aeropuertos para cumplir con las necesidades del cliente a un costo mínimo | 1986 | $6 millones |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Citgo Petroleum Corp. | Optimización de las operaciones de refinación y de la oferta, distribución y comercialización de productos | 1987 | $70 millones |
| SANTOS, Ltd., Australia | Optimización de inversiones de capital para producir gas natural durante 25 años | 1987 | $3 millones |
| Electric Power Research Institute | Administración de inventarios de petróleo y carbón para el servicio eléctrico con el fin de equilibrar los costos de inventario y los riesgos de faltantes | 1989 | $59 millones |
| San Francisco Police Department | Optimización de la programación y asignación de oficiales de patrulla con un sistema informatizado | 1989 | $11 millones |
| Texaco Inc. | Optimización de la mezcla de ingredientes disponibles para que los productos de gasolina cumplieran con los requerimientos de ventas y calidad | 1989 | $30 millones |
| IBM | Integración de una red nacional de inventario de refacciones para mejorar el apoyo al servicio | 1990 | $20 millones + $250 millones en menor inventario |
| U.S. Military Airlift Command | Rapidez en la coordinación de aviones, tripulación, carga y pasajeros para manejar la evacuación por aire en el proyecto "Tormenta del Desierto" en el Medio Oriente | 1992 | Victoria |
| American Airlines | Diseño de un sistema de estructura de precios, sobreventas y coordinación de vuelos para mejorar las utilidades | 1992 | $500 millones más de ingresos |
| Yellow Freight System, Inc. | Optimización del diseño de una red nacional de transporte y la programación de rutas de envío | 1992 | $17.3 millones |
| New Haven Health Dept. | Diseño de un programa efectivo de cambio de agujas para combatir el contagio del SIDA | 1993 | 33% menos contagios |
| AT&T | Desarrollo de un sistema basado en PC para guiar a los clientes del negocio en el diseño del centro de llamadas | 1993 | $750 millones |
| Delta Airlines | Maximización de ganancias a partir de la asignación de los tipos de aviones en 2.500 vuelos nacionales | 1994 | $100 millones |
| Digital Equipment Corp. | Reestructuración de toda la cadena de proveedores entre proveedores, plantas, centros de distribución, sitios potenciales y áreas de mercado | 1995 | $800 millones |
| China | Selección y programación óptima de proyectos masivos para cumplir con las necesidades futuras de energía del país | 1995 | $425 millones |
| Cuerpo de defensa de Sudáfrica | Rediseño óptimo del tamaño y forma del cuerpo de defensa y su sistema de armas | 1997 | $1.100 millones |
| Procter and Gamble | Rediseño del sistema de producción y distribución norteamericano para reducir costos y mejorar la rapidez de llegada al mercado | 1997 | $200 millones |
| Taco Bell | Programación óptima de empleados para proporcionar el servicio a clientes deseado con un costo mínimo | 1998 | $13 millones |
| Hewlett-Packard | Rediseño de tamaño y localización de inventarios de seguridad en la línea de producción de impresoras para cumplir metas de producción | 1998 | $280 millones de ingreso adicional |

**PHPSimplex**

[PHPSimplex](http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es) es una herramienta online para resolver problemas de programación lineal. Su uso es libre y gratuito.

Esta herramienta está pensada principalmente para estudiantes de ingeniería o cursos de Investigación Operativa ya que no solo muestra los resultados sino también las operaciones intermedias ayudando a aprender y comprender los métodos. Otras de sus ventajas son que no precisa de ningún lenguaje en el que enunciar el problema, ofrece una interfaz amigable, es cercano al usuario, de manejo fácil e intuitivo, no es necesario instalar nada para poder usarlo, y está disponible en varios idiomas (si desea que PHPSimplex esté en su idioma [póngase en contacto con nosotros](http://www.phpsimplex.com/contacto.htm)).

PHPSimplex es capaz de resolver problemas mediante el Método Simplex, el Método de las Dos Fases, y el Método Gráfico, y no cuenta con limitaciones en el número de variables de decisión ni en las restricciones de los problemas.

Está disponible también un manual de [ayuda de PHPSimplex](http://www.phpsimplex.com/ayuda.htm) para aprender rápidamente a usar la herramienta.

Además en esta página encontrará teoría de los métodos utilizados, casos especiales a tener en cuenta, ejemplos de problemas resueltos paso a paso, una comparación entre el Método Simplex y el Método Gráfico, etc.

**EJEMPLO**

**En las siguientes líneas podrá leer una breve y sencilla explicación de cómo se debe usar la herramienta PHPSimplex. Una vez que haya modelado el problema, es decir, tenga identificada la función objetivo a maximizar/minimizar junto con sus restricciones, puede estar seguro de que la tarea más difícil ha terminado. Deje ahora que trabaje por usted PHPSimplex.**

**Supongamos que el problema modelado es el mismo del** [**ejemplo resuelto por el método del Simplex**](http://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_simplex.htm)**. Dicho problema tiene 2 variables básicas o de decisión y 3 restricciones. Pues sólo hay que indicarle al programa dichos datos, como puede verse en la captura.**

**Pulse en continuar. Se debe continuar facilitando datos, a fin de que el algoritmo sea capaz de resolver nuestro problema. Ante la pregunta, "¿Cual es el objetivo de la función?" deberá seleccionar del desplegable si desea Maximizar o Minimizar, en el caso que nos ocupa deberá tomar "Maximizar". Rellene adecuadamente las casillas de "Función" con los coeficientes adecuados para cada variable de decisión, para éste ejemplo será 3 y 2. Opere de la misma forma para completar las casillas de las restricciones, teniendo especial cuidado con el tipo de inecuación que sea, ya que puede seleccionar del menú desplegable "≥", "≤"ó "=". No se preocupe de restringir los valores negativos de las variables de decisión, ya que PHPSimplex lo hará por sí solo. Debería quedar como en la siguiente figura.**

**Ahora puede ver el problema introducido por nosotros, y el problema pasado a forma estándar automáticamente por la herramienta. Para comodidad de aquéllos que no deseen observar cada iteración del método Simplex (o método de las Dos Fases), se ha facilitado una opción de "Solución Directa" que obvia todo estos pasos, aunque se puede optar por "Continuar" para ver cada tabla del método Simplex (o método de las Dos Fases).**

**PHPSimplex le mostrará cada iteración del método que esté ejecutando. El elemento marcado en verde, es el elemento pivote de la tabla.**

**Usted solo tendrá que ir pulsando continuar hasta que el método finalice. En tal caso, se remarca en verde el resultado final, y se da un pequeño texto que ayuda a interpretar el resultado final.**

 Para finalizar ésta pequeña ayuda para la herramienta, haremos mención al caso de que esté realizando un problema en el que sea necesario hacer el método de las dos fases. En el paso de mostrar el problema en forma estándar, se le advertirá de que se va a entrar en la Fase I del Método de las Dos Fases.

Cuando se realizan las iteraciones, en el caso de que el problema tenga solución se indica que se pasa a la Fase II...

... o en caso de no tener solución, se da tal información.

Para el resto de iteraciones del método de las Dos Fases la forma de actuar es la misma.

# Teoría sobre el modelado de problemas

Para poder solucionar un problema mediante un algoritmo primero se debe extraer toda la información que nos aporta el enunciado y preparar el problema para dicho algoritmo.

Los pasos para modelar un problema son los siguientes:

* Paso 1: Se determinan las variables de decisión y se expresan algebraicamente.
  + X1,..., Xn
* Paso 2: Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión:  
  + A11·X1 + A12·X2 + ... + A1n·Xn ≥, ≤, ó = b1
  + A21·X1 + A22·X2 + ... + A 2n·Xn ≥, ≤, ó = b2
  + ...
  + Am1·X1 + Am2·X2 + ... + Amn·Xn ≥, ≤, ó = bm
* Paso 3: Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ...
  + X1,..., Xn ≥ 0
  + X1,..., Xn son números enteros, o son booleanos,...
  + Paso 4: Se determina la función objetivo.  
      
    Maximizar o minimizar Z = C1·X1 + C2·X2 + ... + Cn·Xn

 A modo de ejemplo vamos a ver como se modelan algunos problemas típicos:

* [Problema de la dieta](http://www.phpsimplex.com/problema_dieta.htm)

**Problema de la dieta**

El problema de la dieta fue uno de los primeros sobre optimización. Se trataba hallar la manera más económica de alimentar al ejercito pero asegurando al mismo tiempo unos determinados niveles nutricionales.

Este tipo de problema se puede plantear en distintas formas tales como minimizar los gastos de la compra, dieta para el ganado, una dieta adelgazante que cumpla unos determinados niveles de calorías, proteínas, hidratos de carbono, ....

Ejemplo

Nos proponemos alimentar el ganado de una granja con una dieta que sea la más económica posible. Dicha dieta debe contener cuatro tipos de nutrientes que llamamos A, B, C, y D. Estos componentes se encuentran en dos tipos de piensos M y N. La cantidad, en gramos, de cada componente por kilo de estos piensos viene dada en la tabla siguiente:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |
| M | 100 | - | 100 | 200 |
| N | - | 100 | 200 | 100 |

La dieta diaria de un animal debe estar compuesta por al menos 0.4Kg del componente A, 0.6Kg del componente B, 2Kg del componente C, y 1.7Kg del componente D. El compuesto M cuesta 0.2€/Kg y el compuesto N 0.08€/Kg. ¿Qué cantidades de piensos M y N deben adquirirse para que el gasto de comida sea el menor posible?

 Se determinan las variables de decisión y se representan algebraicamente. En este caso:

* X1: cantidad de pienso M en Kg
* X2: cantidad de pienso N en Kg

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de la composición requerida para la dieta diaria (en Kg):

* En el componente A: 0.1·X1 + 0·X2 ≥ 0.4
* En el componente B: 0·X1 + 0.1·X2 ≥ 0.6
* En el componente C: 0.1·X1 + 0.2·X2 ≥ 2
* En el componente D: 0.2·X1 + 0.1·X2 ≥ 1.7

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso, la única restricción es que las cantidades de pienso que forman la dieta no pueden ser negativas:

* X1 ≥ 0
* X2 ≥ 0

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = 0.2·X1 + 0.08·X2
* Problema de transporte de tropas

**Transporte de tropas**

Un destacamento militar formado por 50 soldados ingenieros, 36 zapadores, 22 de las fuerzas especiales, y 120 soldados de infantería como tropa de apoyo, ha de transportarse hasta una posición estratégica importante. En el parque de la base se dispone de 4 tipos de vehículos A, B, C, y D, acondicionados para transporte de tropas. El número de personas que cada vehículo puede transportar es 10, 7, 6, y 9, de la forma en que se detalla en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Ingenieros | Zapadores | Fuerzas especiales | Infantería |
| A | 3 | 2 | 1 | 4 |
| B | 1 | 1 | 2 | 3 |
| C | 2 | 1 | 2 | 1 |
| D | 3 | 2 | 3 | 1 |

El combustible necesario para que cada vehículo llegue hasta el punto de destino se estima en 160, 80, 40, y 120 litros respectivamente. Si queremos ahorrar combustible, ¿cuántos vehículos de cada tipo habrá que utilizar para que el consumo sea el mínimo posible?

Se determinan las variables de decisión y se representan algebraicamente. En este caso:

* Xi: número de vehículos de cada tipo que se usen
* X1: número de vehículos de tipo A
* X2: número de vehículos de tipo B
* X3: número de vehículos de tipo C
* X4: número de vehículos de tipo D

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de los soldados que deben ser transportados:

* Ingenieros: 3·X1 + X2 + 2·X3 + 3·X4 ≥ 50
* Zapadores: 2·X1 + X2 + X3 + 2·X4 ≥ 36
* Fuerzas especiales: X1 + 2·X2 + 2·X3 + 3·X4 ≥ 22
* Infantería: 4·X1 + 3·X2 + X3 + X4 ≥ 120

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que la cantidad de vehículos no puede ser negativa y debe ser además un número entero:

* Xi ≥ 0
* Xi son enteros

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = 160·X1 + 80·X2 + 40·X3 + 120·X4
* [Problema de transporte de mercancías](http://www.phpsimplex.com/problema_transporte_mercancia.htm)

**Transporte de mercancías**

Para este tipo de problemas, aunque pueden ser resueltos por el método del Simplex, existe un método específico de más fácil resolución: el método del transporte o método simplificado del Simplex para problemas de transporte. Este método ahorra bastante tiempo y cálculos frente al método del Simplex tradicional.

Sin embargo el problema se modela de la misma forma.

Ejemplo

Un fabricante desea despachar varias unidades de un artículo a tres tiendas T1, T2, y T3. Dispone de dos almacenes desde donde realizar el envío, A y B. En el primero dispone de 5 unidades de este artículo y en el segundo 10. La demanda de cada tienda es de 8, 5, y 2 unidades respectivamente. Los gastos de transporte de un artículo desde cada almacén a cada tienda están expresados en la tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | T1 | T2 | T3 |
| A | 1 | 2 | 4 |
| B | 3 | 2 | 1 |

¿Cómo ha de realizar el transporte para que sea lo más económico posible?

Se determinan las variables de decisión, en este caso:

* Xi: número de unidades transportadas desde cada almacén a cada tienda
* X1: número de unidades transportadas desde el almacén A hasta la tienda T1
* X2: número de unidades transportadas desde el almacén A hasta la tienda T2
* X3: número de unidades transportadas desde el almacén A hasta la tienda T3
* X4: número de unidades transportadas desde el almacén B hasta la tienda T1
* X5: número de unidades transportadas desde el almacén B hasta la tienda T2
* X6: número de unidades transportadas desde el almacén B hasta la tienda T3

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de la disponibilidad de unidades que hay en cada almacén así como de la demanda de cada tienda:

* Disponibilidad en el almacén A: X1 + X2 + X3 = 5
* Disponibilidad en el almacén B: X4 + X5 + X6 = 10
* Demanda de la tienda T1: X1 + X4 = 8
* Demanda de la tienda T2: X2 + X5 = 5
* Demanda de la tienda T3: X3 + X6 = 2

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que la cantidad de unidades no puede ser negativa y debe ser además un número entero:

* Xi ≥ 0
* Xi son enteros

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = X1 + 2·X2 + 4·X3 + 3·X4 + 2·X5 + X6
* [Problema de los árboles frutales](http://www.phpsimplex.com/problema_arboles_frutales.htm)

**Árboles frutales**

Un agricultor tiene una parcela de 640m² para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales, manzanos y limoneros. Se pregunta de qué forma debería repartir la superficie de la parcela entre las variedades para conseguir el máximo beneficio sabiendo que:

* cada naranjo necesita un mínimo de 16m², cada peral 4m², cada manzano 8m² y cada limonero 12m².
* dispone de 900 horas de trabajo al año, necesitando cada naranjo 30 horas al año, cada peral 5 horas, cada manzano 10 horas, y cada limonero 20 horas.
* a causa de la sequía, el agricultor tiene restricciones para el riego: le han asignado 200m³ de agua anuales. Las necesidades anuales son de 2m³ por cada naranjo, 1m³ por cada peral, 1m³ por cada manzano, y 2m³ por cada limonero.
* los beneficios unitarios son de 50, 25, 20, y 30 € por cada naranjo, peral, manzano y limonero respectivamente.

Se determinan las variables de decisión y se representan algebraicamente. En este caso:

* X1: número de naranjos
* X2: número de perales
* X3: número de manzanos
* X4: número de limoneros

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de las necesidades de cada árbol de terreno, horas de trabajo anuales, y necesidades de riego:

* Necesidades de terreno: 16·X1 + 4·X2 + 8·X3 + 12·X4 ≤ 640
* Necesidades de horas anuales: 30·X1 + 5·X2 + 10·X3 + 20·X4 ≤ 900
* Necesidades de riego: 2·X1 + X2 + X3 + 2·X4 ≤ 200

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que el número de árboles no puede ser negativo y además debe ser un número entero:

* Xi ≥ 0
* Xi son enteros

Se determina la función objetivo:

* Maximizar Z = 50·X1 + 25·X2 + 20·X3 + 30·X4
* [Problema de asignación de personal](http://www.phpsimplex.com/problema_asignacion_personal.htm)

**Asignación de personal**

Una empresa ha preseleccionado 5 candidatos para ocupar 4 puestos de trabajo en dicha empresa. Los puestos de trabajo consisten en manejar 4 máquinas diferentes (un trabajador para cada máquina). La empresa puso a prueba a los 5 trabajadores en las 4 máquinas, realizando el mismo trabajo todos ellos en cada una de las máquinas, obteniendo los siguientes tiempos:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Máquina1 | Máquina2 | Máquina3 | Máquina4 |
| Candidato1 | 10 | 6 | 6 | 5 |
| Candidato2 | 8 | 7 | 6 | 6 |
| Candidato3 | 8 | 6 | 5 | 6 |
| Candidato4 | 9 | 7 | 7 | 6 |
| Candidato5 | 8 | 7 | 6 | 5 |

Determinar qué candidatos debe seleccionar la empresa y a qué máquinas debe asignarlos.

 Se determinan las variables de decisión, en este caso:

* Xij: acción de que el trabajador i es asignado a la máquina j (0 indica que el trabajador no ha sido asignado y 1 que sí ha sido asignado)

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones son que cada trabajador debe ser asignado a una sola máquina y no debe quedar ninguna máquina sin un trabajador asignado a ella:

* Cada trabajador debe estar asignado a una sola máquina o a ninguna si no se selecciona:  
    
  + X11 + X12 + X13 + X14 ≤ 1
  + X21 + X22 + X23 + X24 ≤ 1
  + X31 + X32 + X33 + X34 ≤ 1
  + X41 + X42 + X43 + X44 ≤ 1
  + X51 + X52 + X53 + X54 ≤ 1
* En cada máquina debe haber un trabajador:  
    
  + X11 + X21 + X31 + X41 + X51 = 1
  + X12 + X22 + X32 + X42 + X52 = 1
  + X13 + X23 + X33 + X43 + X53 = 1
  + X14 + X24 + X34 + X44 + X54 = 1

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que las asignaciones de trabajadores a máquinas no puede ser negativa y debe ser además una variable booleana (0 no se asigna, 1 se asigna):

* Xij ≥ 0
* Xij es booleano

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = 10·X11 + 8·X21 + 8·X31 + 9·X41 + 8·X51 + 6·X12 + 7·X22 + 6·X32 + 7·X42 + 7·X52 + 6·X13 + 6·X23 + 5·X33 + 7·X43 + 6·X53 + 5·X14 + 6·X24 + 6·X34 + 6·X44 + 5·X54
* [Problema del camino mínimo](http://www.phpsimplex.com/problema_camino_minimo.htm)

**Camino mínimo**

Los problemas conocidos como problemas del camino mínimo o camino más corto, tratan como su nombre indica de hallar la ruta mínima o más corta entre dos puntos. Este mínimo puede ser la distancia entre los puntos origen y destino o bien el tiempo transcurrido para trasladarse desde un punto a otro. Se aplica mucho para problemas de redes de comunicaciones.

Este tipo de problemas pueden ser resueltos por el método del Simplex, sin embargo existen otros métodos más eficientes como por ejemplo el algoritmo de Dijkstra o el de Bellman-Ford.

Ejemplo

Una persona tiene que desplazarse a diario de un pueblo 1 a otro 7. Está estudiando cual es el trayecto más corto usando un mapa de carreteras. Las carreteras y sus distancias están representadas en la figura siguiente:

Se determinan las variables de decisión, en este caso:

* Xij: acción de desplazarse del pueblo i al j (0 indica que no hay desplazamiento y 1 que sí hay desplazamiento)

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen del balance entre los posibles caminos que parten desde cada pueblo y los que llegan hasta él (obviando los caminos que nos devuelvan al punto de partida y los que provengan del punto de destino):

* Balance de caminos del pueblo 1: X12 + X13 = 1
* Balance de caminos del pueblo 2: X24 + X25 - X12 - X42 - X52 = 0
* Balance de caminos del pueblo 3: X34 + X36 - X13 - X43 - X63 = 0
* Balance de caminos del pueblo 4: X42 + X43 + X45 - X24 - X34 - X54 = 0
* Balance de caminos del pueblo 5: X52 + X54 + X57 - X25 - X45 = 0
* Balance de caminos del pueblo 6: X63 + X67 - X36 = 0
* Balance de caminos del pueblo 7: - X57 - X67 = -1

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que las variables deben ser booleanas (0 no se toma el camino, 1 se toma), y por lo tanto no pueden ser negativas:

* Xij ≥ 0
* Xij es booleano

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = 12·X12 + 4·X13 + 5·X24 + 3·X25 + 2·X34 + 10·X36 + 5·X42 + 2·X43 + 10·X45 + 3·X52 + 10·X54 + 2·X57 + 10·X63 + 4·X67
* [Problema de localización](http://www.phpsimplex.com/problema_localizacion.htm)

**Localización**

Una empresa tiene la exclusiva para la distribución de un producto en 4 poblaciones. En un estudio de mercado se ha determinado la demanda potencial, según se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Población 1 | Población 2 | Población 3 | Población 4 |
| 3000 unidades | 2000 unidades | 2500 unidades | 2700 unidades |

Se sabe que los costes de transporte son de 0.02€ por Km y unidad transportada. La distancia en Km existente entre los pueblos es la que figura en la tabla siguiente:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Población 1 | Población 2 | Población 3 | Población 4 |
| Población 1 | - | 25 | 35 | 40 |
| Población 2 | 25 | - | 20 | 40 |
| Población 3 | 35 | 20 | - | 30 |
| Población 4 | 40 | 40 | 30 | - |

Para abaratar los costes de transporte se decide instalar un almacén con capacidad para 6000 unidades en dos de estas cuatro poblaciones. Determinar en qué poblaciones se deben instalar los almacenes.

 Se determinan las variables de decisión, en este caso:

* Xij: cantidad enviada del almacén i a la población j
* Yi: almacén situado en la población i (0 indica que no hay ningún almacén y 1 que sí lo hay)

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de la siguiente manera:

* Las unidades que se envían a cada población desde los almacenes deben cumplir con la demanda de dicha población:  
    
  + X11 + X21 + X31 + X41 ≥ 3000
  + X12 + X22 + X32 + X42 ≥ 2000
  + X13 + X23 + X33 + X43 ≥ 2500
  + X14 + X24 + X34 + X44 ≥ 2700
  + Solo se crearán dos almacenes:  
      
    Y1 + Y2 + Y3 + Y4 = 2
* La cantidad de unidades que puede enviar cada almacén debe ser menor o igual que la capacidad de éste:  
    
  + X11 + X12 + X13 + X14 ≤ 6000·Y1
  + X21 + X22 + X23 + X24 ≤ 6000·Y2
  + X31 + X32 + X33 + X34 ≤ 6000·Y3
  + X41 + X42 + X43 + X44 ≤ 6000·Y4

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso las restricciones son que las unidades enviadas desde cada almacén no pueden ser negativas y además la variable que determina si se creará o no un almacén debe ser booleana (0 no se crea, 1 se crea):

* Xij ≥ 0
* Yi es booleano

Se determina la función objetivo:

* Minimizar Z = 0.5·X12 + 0.7·X13 + 0.8·X14 + 0.5·X21 + 0.4·X23 + 0.8·X24 + 0.7·X31 + 0.4·X32 + 0.6·X34 + 0.8·X41 + 0.8·X42 + 0.6·X43

[Problema de inversión en bolsa](http://www.phpsimplex.com/problema_inversion_bolsa.htm)

**Inversión en bolsa**

Una inversora dispone de 50.000€ para invertir entre las cuatro siguientes posibilidades: bolsa X, bolsa Y, bonos X, y bonos Y, por el periodo de un año. Un máximo de 10.500€ puede ser invertido en bonos X, y un máximo de 10.000€ en bonos Y. La inversión en la bolsa X conlleva un riesgo considerable por lo que se determina no invertir más de un cuarto de la inversión total. La cantidad invertida en la bolsa Y debe ser al menos tres veces la cantidad invertida en la bolsa X. Además, la inversora requiere que la inversión en bonos sea al menos tan grande como la mitad de la inversión en las bolsas. Los retornos netos anuales se estiman según se muestra en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Bolsa X | Bolsa Y | Bonos X | Bonos Y |
| 20% | 10% | 9% | 11% |

¿Cuál es la forma óptima de realizar la inversión para conseguir las máximas ganancias?

Se determinan las variables de decisión, en este caso:

* X1: inversión en bolsa X
* X2: inversión en bolsa Y
* X3: inversión en bonos X
* X4: inversión en bonos Y

Se determinan las restricciones y se expresan como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión. Dichas restricciones se deducen de las decisiones tomadas por la inversora sobre la forma de invertir y de la inversión máxima que se puede realizar:

* X1 + X2 + X3 + X4 ≤ 50000
* X1 ≤ 12500
* X3 ≤ 10500
* X4 ≤ 10000
* 3·X1 - X2 ≤ 0
* 0.5·X1 + 0.5·X2 - X3 - X4 ≤ 0

Se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no puedan ser negativas, que sean enteras, que solo puedan tomar determinados valores, ... En este caso la única restricción es que las inversiones no pueden ser negativas:

* Xi ≥ 0

Se determina la función objetivo:

* Maximizar Z = 0.2·X1 + 0.1·X2 + 0.09·X3 + 0.11·X4

# MÉTODO SIMPLEX

[Preparando el modelo para adaptarlo al método Simplex.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#preparacion)  
    [Cambio del tipo de optimización.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#cambio_de_tipo)  
    [Conversión de signo de los términos independientes.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#conversion_de_signo)  
    [Todas las restricciones son de igualdad.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#igualdad)  
[Desarrollando el método Simplex.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#algoritmo)  
    [Método Simplex.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#msimplex)  
    [Método de las Dos Fases.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#dos_fases)  
[Identificando casos anómalos y soluciones.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#anomalos)  
[Método Gráfico.](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_grafico.htm)  
[Ejemplo del método Simplex.](http://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_simplex.htm)  
[Ejemplo del método Gráfico.](http://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_grafico.htm)  
    [Comparación del método Simplex con el método Gráfico.](http://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_grafico.htm#comparacion)

El método Simplex es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución.

Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera, el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono (o de las aristas del poliedro, si el número de variables es mayor). Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución. (Véase [método Gráfico](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_grafico.htm))

El método Simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo, f, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual f aumenta.

Deberá tenerse en cuenta que este método sólo trabaja para restricciones que tengan un tipo de desigualdad "≤" y coeficientes independientes mayores o iguales a 0, y habrá que estandarizar las mismas para el algoritmo. En caso de que después de éste proceso, aparezcan (o no varíen) restricciones del tipo "≥" o "=" habrá que emplear otros métodos, siendo el más común el método de las Dos Fases.

PREPARANDO EL MODELO PARA ADAPTARLO AL MÉTODO SIMPLEX

Esta es la forma estándar del modelo:

|  |  |
| --- | --- |
| Función objetivo: | c1·x1 + c2·x2 + ... + cn·xn |
| Sujeto a: | a11·x1 + a12·x2 + ... + a1n·xn = b1 a21·x1 + a22·x2 + ... + a2n·xn = b2 ... am1·x1 + am2·x2 + ... + amn·xn = bm x1,..., xn ≥ 0 |

Para ello se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. El objetivo es de la forma de maximización o de minimización.
2. Todas las restricciones son de igualdad.
3. Todas las variables son no negativas.
4. Las constantes a la derecha de las restricciones son no negativas.

## Cambio del tipo de optimización.

Si en nuestro modelo, deseamos minimizar, podemos dejarlo tal y como está, pero deberemos tener en cuenta nuevos criterios para la condición de parada (deberemos parar de realizar iteraciones cuando en la fila del valor de la función objetivo sean todos menores o iguales a 0), así como para la condición de salida de la fila. Con objeto de no cambiar criterios, se puede convertir el objetivo de minimizar la función F por el de maximizar F·(-1).

Ventajas: No deberemos preocuparnos por los criterios de parada, o condición de salida de filas, ya que se mantienen.

Inconvenientes: En el caso de que la función tenga todas sus variables básicas positivas, y además las restricciones sean de desigualdad "≤", al hacer el cambio se quedan negativas y en la fila del valor de la función objetivo se quedan positivos, por lo que se cumple la condición de parada, y por defecto el valor óptimo que se obtendría es 0.

Solución: En la realidad no existen este tipo de problemas, ya que para que la solución quedara por encima de 0, alguna restricción debería tener la condición "≥", y entonces entraríamos en un modelo para el [método de las Dos Fases](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#dos_fases).

## Conversión de signo de los términos independientes (las constantes a la derecha de las restricciones)

Deberemos preparar nuestro modelo de forma que los términos independientes de las restricciones sean mayores o iguales a 0, sino no se puede emplear el método Simplex. Lo único que habría que hacer es multiplicar por "-1" las restricciones donde los términos independientes sean menores que 0.

Ventaja: Con ésta simple modificación de los signos en la restricción podemos aplicar el método Simplex a nuestro modelo.

Inconvenientes: Puede resultar que en las restricciones donde tengamos que modificar los signos de las constantes, los signos de las desigualdades fueran ("=", "≤"), quedando ("=","≥") por lo que en cualquier caso deberemos desarrollar el método de las Dos Fases. Este inconveniente no es controlable, aunque nos podría beneficiar si sólo existen términos de desigualdad ("≤","≥"), y los "≥" coincidieran con restricciones donde el término independiente es negativo.

## Todas las restricciones son de igualdad.

Si en nuestro modelo aparece una inecuación con una desigualdad del tipo "≥", deberemos añadir una nueva variable, llamada variable de exceso s*i*, con la restricción si ≥ 0. La nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y restando en las inecuaciones.

Surge ahora un problema, veamos cómo queda una de nuestras inecuaciones que contenga una desigualdad "≥" :

a11·x1 + a12·x2 ≥ b1 a11·x1 + a12·x2 - 1·xs = b1

Como todo nuestro modelo, está basado en que todas sus variables sean mayores o iguales que cero, cuando hagamos la primera iteración con el método Simplex, las variables básicas no estarán en la base y tomarán valor cero, y el resto el valor que tengan. En este caso nuestra variable xs, tras hacer cero a x1 y x2, tomará el valor -b1. No cumpliría la condición de no negatividad, por lo que habrá que añadir una nueva variable, xr, que aparecerá con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en la inecuación de la restricción correspondiente. Quedaría entonces de la siguiente manera:

a11·x1 + a12·x2 ≥ b1 a11·x1 + a12·x2 - 1·xs + 1 ·xr = b1

Este tipo de variables se les llama variables artificiales, y aparecerán cuando haya inecuaciones con desigualdad ("=","≥"). Esto nos llevará obligadamente a realizar el [método de las Dos Fases](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#dos_fases), que se explicará más adelante.

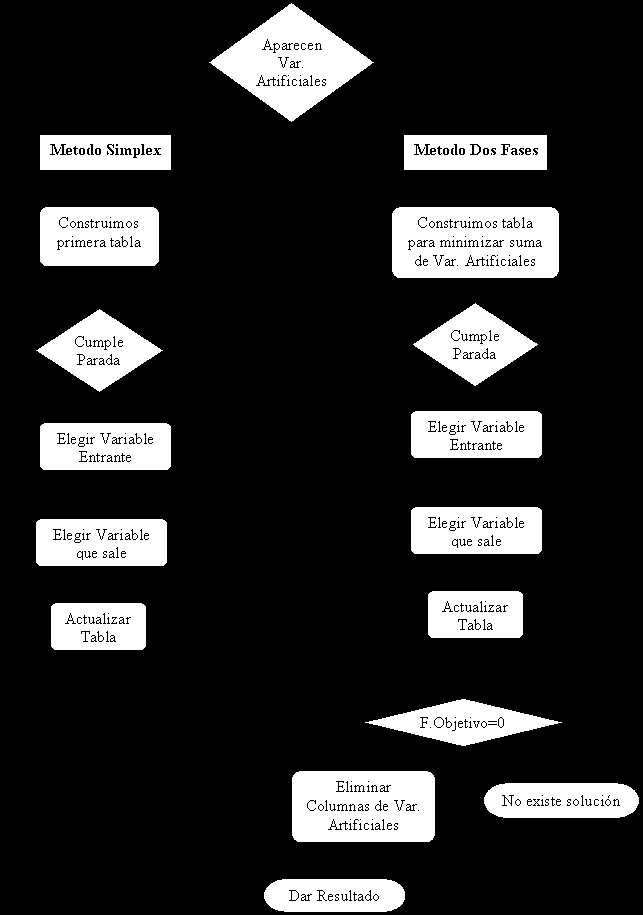
Del mismo modo, si la inecuación tiene una desigualdad del tipo "≤", deberemos añadir una nueva variable, llamada variable de holgura si, con la restricción si "≥" 0 . La nueva variable aparece con coeficiente cero en la función objetivo, y sumando en las inecuaciones.

A modo resumen podemos dejar esta tabla, según la desigualdad que aparezca, y con el valor que deben estar las nuevas variables.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tipo de desigualdad** | **Tipo de variable que aparece** |
| ≥ | - exceso + artificial |
| = | + artificial |
| ≤ | + holgura |

## DESARROLLANDO EL MÉTODO SIMPLEX

Una vez que hemos estandarizado nuestro modelo, puede ocurrir que necesitemos aplicar el método Simplex o el [método de las Dos Fases](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm#dos_fases). Véase en la figura como debemos actuar para llegar a la solución de nuestro problema.



Explicaremos paso a paso los puntos de cada método, concretando los aspectos que hay que tener en cuenta.

Método Simplex

- Construcción de la primera tabla: En la primera columna de la tabla aparecerá lo que llamaremos base, en la segunda el coeficiente que tiene en la función objetivo cada variable que aparece en la base (llamaremos a esta columna Cb), en la tercera el término independiente de cada restricción (P0), y a partir de ésta columna aparecerán cada una de las variables de la función objetivo (Pi). Para tener una visión más clara de la tabla, incluiremos una fila en la que pondremos cada uno de los nombres de las columnas. Sobre ésta tabla que tenemos incluiremos dos nuevas filas: una que será la que liderará la tabla donde aparecerán las constantes de los coeficientes de la función objetivo, y otra que será la última fila, donde tomará valor la función objetivo. Nuestra tabla final tendrá tantas filas como restricciones.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla** | | | | | | |
|  |  |  | C1 | C2 | ... | Cn |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **...** | **Pn** |
| Pi1 | Ci1 | bi1 | a11 | a12 | ... | a1n |
| Pi2 | Ci2 | bi2 | a21 | a22 | ... | a2n |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Pim | Cim | bim | am1 | am2 | ... | amn |
| **Z** |  | Z0 | Z1-C1 | Z2-C2 | ... | Zn-Cn |

 Los valores de la fila Z se obtienen de la siguiente forma: El valor Z0 será el de sustituir Cim en la función objetivo (y cero si no aparece en la base). El resto de columnas se obtiene restando a este valor el del coeficiente que aparece en la primera fila de la tabla.

Se observará al realizar el método Simplex, que en esta primera tabla, en la base estarán las variables de holgura.

- Condición de parada: Comprobaremos si debemos de dar una nueva iteración o no, que lo sabremos si en la fila Z aparece algún valor negativo. Si no aparece ninguno, es que hemos llegado a la solución óptima del problema.

- Elección de la variable que entra: Si no se ha dado la condición de parada, debemos seleccionar una variable para que entre en la base en la siguiente tabla. Para ello nos fijamos en los valores estrictamente negativos de la fila Z, y el menor de ellos será el que nos de la variable entrante.

- Elección de la variable que sale: Una vez obtenida la variable entrante, obtendremos la variable que sale, sin más que seleccionar aquella fila cuyo cociente P0/Pj sea el menor de los estrictamente positivos (teniendo en cuenta que sólo se hará cuando Pj sea mayor de 0). La intersección entre la columna entrante y la fila saliente nos determinará el elemento pivote.

- Actualización de la tabla: Las filas correspondientes a la función objetivo y a los títulos permanecerán inalterados en la nueva tabla. El resto deberá calcularse de dos formas diferentes:

* Si es la fila pivote cada nuevo elemento se calculará:  
    
  *Nuevo Elemento Fila Pivote = Elemento Fila Pivote actual / Pivote.*
* Para el resto de elementos de filas se calculará:  
    
  *Nuevo Elemento Fila = Elemento Fila Pivote actual - (Elemento Columna Pivote en la fila actual \* Nuevo Elemento Fila).*

## Método de las Dos Fases

Éste método difiere del Simplex en que primero hay que resolver un problema auxiliar que trata de minimizar la suma de las variables artificiales. Una vez resuelto este primer problema y reorganizar la tabla final, pasamos a la segunda fase, que consiste en realizar el método Simplex normal.

### FASE 1

En esta primera fase, se realiza todo de igual manera que en el método Simplex normal, excepto la construcción de la primera tabla, la condición de parada y la preparación de la tabla que pasará a la fase 2.

- Construcción de la primera tabla: Se hace de la misma forma que la tabla inicial del método Simplex, pero con algunas diferencias. La fila de la función objetivo cambia para la primera fase, ya que cambia la función objetivo, por lo tanto aparecerán todos los términos a cero excepto aquellos que sean variables artificiales, que tendrán valor "-1" debido a que se está minimizando la suma de dichas variables (recuerde que minimizar F es igual que maximizar F·(-1)).

La otra diferencia para la primera tabla radica en la forma de calcular la fila Z. Ahora tendremos que hacer el cálculo de la siguiente forma: Se sumarán los productos Cb·Pj para todas las filas y al resultado se le restará el valor que aparezca (según la columna que se éste haciendo) en la fila de la función objetivo.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla** | | | | | | | | |
|  |  | C0 | C1 | C2 | ... | Cn-k | ... | Cn |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **...** | **Pn-k** | **...** | **Pn** |
| Pi1 | Ci1 | bi1 | a11 | a12 | ... | a1n-k | ... | a1n |
| Pi2 | Ci2 | bi2 | a21 | a22 | ... | a2n-k | ... | a2n |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Pim | Cim | bim | am1 | am2 | ... | amn-k | ... | amn |
| **Z** |  | Z0 | Z1 | Z2 | ... | Zn-k | ... | Zn |

Siendo Zj = Σ(Cb·Pj) - Cj y los Cj = 0 para todo j comprendido entre 0 y n-k (variables de decisión, holgura y exceso), y Cj = -1 para todo j comprendido entre n-k y n (variables artificiales).

  Condición de parada: La condición de parada es la misma que en el método Simplex normal. La diferencia estriba en que pueden ocurrir dos casos cuando se produce la parada: la función toma un valor 0, que significa que el problema original tiene solución, o que tome un valor distinto, indicando que nuestro modelo no tiene solución.

- Eliminar Columna de variables artificiales: Si hemos llegado a la conclusión de que el problema original tiene solución, debemos preparar nuestra tabla para la segunda fase. Deberemos eliminar las columnas de las variables artificiales, modificar la fila de la función objetivo por la original, y calcular la fila Z de la misma forma que en la primera tabla de la fase 1.

## IDENTIFICANDO CASOS ANÓMALOS Y SOLUCIONES

Obtención de la solución: Cuando se ha dado la condición de parada, obtenemos el valor de las variables básicas que están en la base y el valor óptimo que toma la función que están en la base mirando la columna P0. En el caso de que estemos minimizando, se multiplicará por "-1" el valor óptimo.

Infinitas soluciones: Cumplida la condición de parada, si se observa que alguna variable que no está en la base, tiene un 0 en la fila Z, quiere decir que existe otra solución que da el mismo valor óptimo para la función objetivo. Si estamos ante este caso, estamos ante un problema que admite infinitas soluciones, todas ellas comprendidas dentro del segmento (o porción del plano, o región del espacio, dependiendo del número de variables del problema) que define Ax+By=Z0. Si se desea se puede hacer otra iteración haciendo entrar en la base a la variable que tiene el 0 en la fila Z, y se obtendrá otra solución.

Solución ilimitada: Si al intentar buscar la variable que debe abandonar la base, nos encontramos que toda la columna de la variable entrante tiene todos sus elementos negativos o nulos, estamos ante un problema que tiene solución ilimitada. No hay valor óptimo concreto, ya que al aumentar el valor de las variables se aumenta el valor de la función objetivo, y no viola ninguna restricción.

No existe solución: En el caso de que no exista solución, seguro que tendremos que realizar las dos fases, por lo que al término de la primera sabremos si estamos en tal situación.

Empate de variable entrante: Se puede optar por cualquiera de ellas, sin que afecte a la solución final, el inconveniente que presenta es que según por cual se opte se harán más o menos iteraciones. Se aconseja que se opte a favor de las variables básicas, ya que son aquellas las que quedarán en la base cuando se alcance la solución con estos métodos.

Empate de variable saliente: Se puede nuevamente optar por cualquiera de ellas, aunque se puede dar el caso degenerado y entrar en ciclos perpetuos. Para evitarlos en la medida de lo posible, discriminaremos a favor de las variables básicas haciendo que se queden en la base. Ante el caso de estar en la primera fase (del método de las Dos Fases), se optará por sacar en caso de empate las variables artificiales.

Curiosidad Fase 1: Al finalizar la fase 1, si el problema original tiene solución, todas las variables artificiales, en la fila Z deben tener el valor "1".

¿Pivote puede ser 0?: No, ya que siempre se realizan los cocientes entre valores no negativos y mayores que cero.

 Interpretación gráfica del Método Simplex

La resolución de problemas lineales con sólo dos o tres variables de decisión se puede ilustrar gráficamente, mostrándose como una ayuda visual para comprender muchos de los conceptos y términos que se utilizan y formalizan con métodos de solución más sofisticados, como por ejemplo el [Método Simplex](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm), necesarios para la resolución de problemas con varias variables. Para ello se puede usar el método Gráfico.

Aunque en la realidad rara vez surgen problemas con sólo dos o tres variables de decisión, es sin embargo muy útil esta metodología de solución e interpretación, en la que se verán las situaciones típicas que se pueden dar, como son la existencia de una solución óptima única, de soluciones óptimas alternativas, la no existencia de solución y la no acotación. Describimos aquí las fases del procedimiento de solución del Método Gráfico:

1. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas en el que cada variable de decisión esté representada por un eje, con la escala de medida adecuada a su variable asociada.
2. Dibujar en el sistema de coordenadas las restricciones del problema (incluyendo las de no negatividad). Para ello, observamos que si una restricción es una inecuación, define una región que será el semiplano limitado por la línea recta que se tiene al considerar la restricción como una igualdad. Si la restricción fuera una ecuación, la región que define se dibuja como una línea recta. La intersección de todas las regiones determina la región factible o espacio de soluciones (que es un conjunto convexo). Si esta región es no vacía, ir a la fase siguiente. En otro caso, no existe solución que satisfaga (simultáneamente) todas las restricciones y el problema no tiene solución, denominándose no factible.
3. Determinar los puntos extremos (puntos que no están situados en segmentos de línea que unen otros dos puntos del conjunto convexo) de la región factible (que, como probaremos en la siguiente sección, son los candidatos a solución óptima). Evaluar la función objetivo en estos puntos y aquél o aquellos que maximicen (o minimicen) el objetivo, corresponden a las soluciones óptimas del problema.

Para comprender con mayor facilidad la aplicación de este método puede ver un [ejemplo del método Gráfico](http://www.phpsimplex.com/ejemplo_metodo_grafico.htm).

**Resolver mediante el método simplex el siguiente problema:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Maximizar** | ***Z = f(x,y) = 3x + 2y*** |
| **sujeto a:** | ***2x + y ≤ 18*** |
|  | ***2x + 3y ≤ 42*** |
|  | ***3x + y ≤ 24*** |
|  | **x ≥ 0 , y ≥ 0** |

Se consideran las siguientes fases:

**1. Convertir las desigualdades en igualdades**

Se introduce una *variable de holgura* por cada una de las restricciones del tipo ≤, para convertirlas en igualdades, resultando el sistema de ecuaciones lineales:

|  |
| --- |
| *2x + y + r = 18* |
| *2x + 3y + s = 42* |
| *3x +y + t = 24* |

**2. Igualar la función objetivo a cero**

|  |
| --- |
| *- 3x - 2y + Z = 0* |

**3. Escribir la tabla inicial simplex**

En las columnas aparecerán todas las variables básicas del problema y las variables de holgura/exceso. En las filas se observan, para cada restricción las variables de holgura con sus coeficientes de las igualdades obtenidas, y la última fila con los valores resultantes de sustituir el valor de cada variable en la función objetivo, y de operar tal como se explicó en la teoría para obtener el resto de valores de la fila:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla I . Iteración nº 1** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P3 | 0 | 18 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| P4 | 0 | 42 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| P5 | 0 | 24 | **3** | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **Z** |  | 0 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 |

**4. Condición de parada**

Cuando en la fila Z no existe ningún valor negativo, se ha alcanzado la solución óptima del problema. En tal caso, se ha llegado al final del algoritmo. De no ser así, se ejecutan los siguientes pasos.

**5. Condición de entrada y salida de la base**

1. Primero debemos saber la variable que entra en la base. Para ello escogemos la columna de aquel valor que en la fila Z sea el menor de los negativos. En este caso sería la variable *x (P1)* de coeficiente - 3.  
     
    Si existiesen dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior (caso de empate), entonces se optará por aquella variable que sea básica.  
     
   La columna de la variable que entra en la base se llama *columna pivote* (En color **verde**).
2. Una vez obtenida la variable que entra en la base, estamos en condiciones de deducir cual será la variable que sale. Para ello se divide cada término independiente (*P0*) entre el elemento correspondiente de la columna pivote, siempre que el resultado sea mayor que cero, y se escoge el mínimo de ellos.  
     
    En nuestro caso: 18/2 [=9] , 42/2 [=21] y 24/3 [=8]  
     
    Si hubiera algún elemento menor o igual a cero no se realiza dicho cociente, y caso de que todos los elementos de la columna pivote fueran de ésta condición tendríamos una solución no acotada y terminaríamos el problema ([Ver teoría del método Simplex](http://www.phpsimplex.com/teoria_metodo_simplex.htm)).  
     
    El término de la columna pivote que en la división anterior dé lugar al menor cociente positivo, el 3, ya que 8 es el menor cociente, indica la fila de la variable de holgura que sale de la base, *t (P5)*. Esta fila se llama *fila pivote* (En color **verde**).  
     
    Si al calcular los cocientes, dos o más son iguales (caso de empate), se escoge aquella que no sea variable básica (si es posible).
3. En la intersección de la *fila pivote* y *columna pivote* tenemos el elemento *pivote*, **3**.

**6. Encontrar los coeficientes de la nueva tabla.**

Los nuevos coeficientes de la fila pivote, *t (P5)*, se obtienen dividiendo todos los coeficientes de dicha fila entre el elemento pivote, 3, que es el que hay que convertir en 1.

A continuación mediante la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de su columna, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo *Z*.

También se puede hacer de la siguiente manera:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fila del pivote:  **Nueva fila del pivote = (Vieja fila del pivote) / (Pivote)**  Resto de las filas:  **Nueva fila = (Vieja fila) -(Coeficiente de la vieja fila en la columna de la variable entrante) x (Nueva fila del pivote)**  Veámoslo con un ejemplo una vez calculada la fila del pivote (fila de x (P1) en la Tabla II):   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Vieja fila de P4 | 42 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | |  | - | - | - | - | - | - | | Coeficiente | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |  | x | x | x | x | x | x | | Nueva fila pivote | 8 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 | |  | = | = | = | = | = | = | | Nueva fila de P4 | 26 | 0 | 7/3 | 0 | 1 | -2/3 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla II . Iteración nº 2** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P3 | 0 | 2 | 0 | **1/3** | 1 | 0 | -2/3 |
| P4 | 0 | 26 | 0 | 7/3 | 0 | 1 | -2/3 |
| P1 | 3 | 8 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| **Z** |  | 24 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |

Se puede observar que no hemos alcanzado la condición de parada ya que en los elementos de la última fila, Z, hay uno negativo, -1. Hay que repetir el proceso:

1. La variable que entra en la base es *y (P2)*, por ser la variable que corresponde a la columna donde se encuentra el coeficiente -1.
2. Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote: 2 / 1/3 [=6] , 26 / 7/3 [=78/7] y 8 / 1/3 [=24]  
   y como el menor cociente positivo es 6, tenemos que la variable que sale es *r (P3)*.
3. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es **1/3**.

Operando de forma análoga a la anterior obtenemos la tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla III . Iteración nº 3** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P2 | 2 | 6 | 0 | 1 | 3 | 0 | -2 |
| P4 | 0 | 12 | 0 | 0 | -7 | 1 | **4** |
| P1 | 3 | 6 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| **Z** |  | 30 | 0 | 0 | 3 | 0 | -1 |

Como en los elementos de la fila Z hay uno negativo, -1, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

1. La variable que entra en la base es *t (P5)*, por ser la variable que corresponde al coeficiente -1.
2. Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote: 6/(-2) [=-3] , 12/4 [=3], y 6/1 [=6]  
   y como el menor cociente positivo es 3, tenemos que la variable que sale es *s (P4)*.
3. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es **4**.

Obtenemos la tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla IV . Iteración nº 4** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P2 | 2 | **12** | 0 | 1 | -1/2 | 1/2 | 0 |
| P5 | 0 | 3 | 0 | 0 | -7/4 | 1/4 | 1 |
| P1 | 3 | **3** | 1 | 0 | 3/4 | -1/4 | 0 |
| **Z** |  | **33** | 0 | 0 | 5/4 | 1/4 | 0 |

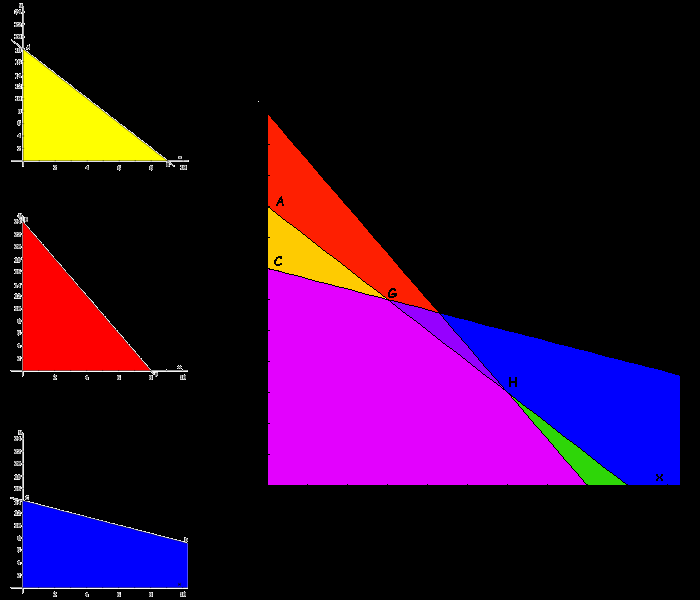
Se observa que en la última fila todos los coeficientes son positivos, por lo tanto se cumple la condición de parada, obteniendo la solución óptima.

La solución óptima viene dada por el valor de Z en la columna de los valores solución, en nuestro caso: **33**. En la misma columna se puede observar el punto donde se alcanza, observando las filas correspondientes a las variables de decisión que han entrado en la base: **(x,y) = (3,12)**

**Resolver mediante el método gráfico el siguiente problema:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Maximizar** | ***Z = f(x,y) = 3x + 2y*** |
| **sujeto a:** | ***2x + y ≤ 18*** |
|  | ***2x + 3y ≤ 42*** |
|  | ***3x + y ≤ 24*** |
|  | **x ≥ 0 , y ≥ 0** |

1. Inicialmente dibujamos el sistema de coordenadas asociando a un eje la variable x, y al otro la y, como se puede ver en la figura.
2. Marcamos en ellos una escala numérica apropiada de acuerdo con los recorridos de las variables en relación con las restricciones del problema. A continuación dibujamos las restricciones. Comenzando con la primera, dibujamos la recta que se obtiene al considerar la restricción como igualdad. Aparece representada como el segmento que une A con B y la región que delimita ésta restricción viene indicada por el color AMARILLO. Se repite el proceso de la misma forma con la segunda y tercera restricción, y delimitan la región de color AZUL y ROJO respectivamente. La región factible es la intersección de las regiones delimitadas por la terna de restricciones y por las condiciones de no negatividad de las variables, es decir, por la región de valores admisibles limitada por ambos ejes coordenados. La región factible está representada por el polígono convexo O-F-H-G-C, que aparece de color VIOLETA.



1. Ya que la región factible es no vacía (problema factible), procedemos a determinar sus puntos extremos, candidatos a soluciones óptimas, que son los puntos O-F-H-G-C de la figura. Finalmente, evaluamos la función objetivo (3x + 2y) en esos puntos, resultado que se recoge en la tabla siguiente. Como el punto G proporciona el mayor valor al objetivo Z, tal punto constituye la solución óptima, que indicaremos x = 3 y = 12, con valor óptimo Z = 33.

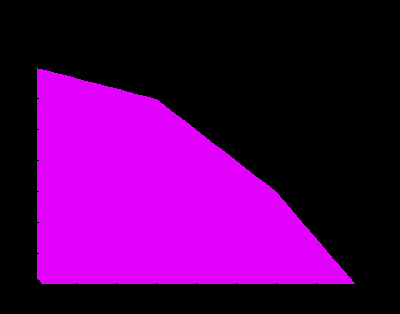
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Punto extremo** | **Coordenadas (x,y)** | **Valor objetivo (Z)** |
| O | (0,0) | 0 |
| C | (0,14) | 28 |
| G | (3,12) | 33 |
| H | (6,6) | 30 |
| F | (8,0) | 24 |

**COMPARACION DEL MÉTODO GRÁFICO CON EL MÉTODO SIMPLEX**

Las sucesivas tablas que hemos construido durante el método simplex van proporcionando el valor de la función objetivo en los distintos vértices, ajustándose, a la vez, los coeficientes de las variables iniciales y de holgura.

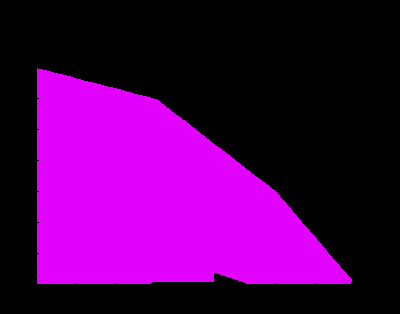
En la primera iteración (Tabla I) han permanecido todos los coeficientes iguales, se ha calculado el valor de la función objetivo en el vértice (0,0) que es el valor que contienen las variables básicas, siendo el resultado 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla I . Iteración nº 1** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P3 | 0 | 18 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| P4 | 0 | 42 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| P5 | 0 | 24 | **3** | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **Z** |  | 0 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 |



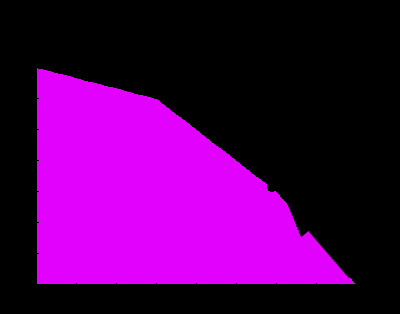
A continuación se desplaza por la arista (0,0) F, calculando el valor de la función Z, hasta llegar a F. éste paso se traduce como la segunda iteración en el Método Simplex, aportando la Tabla II, en la que se ha calculado el valor que corresponde al vértice F(8,0): Z = f(8,0) = 24.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla II . Iteración nº 2** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P3 | 0 | 2 | 0 | **1/3** | 1 | 0 | -2/3 |
| P4 | 0 | 26 | 0 | 7/3 | 0 | 1 | -2/3 |
| P1 | 3 | 8 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| **Z** |  | 24 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |



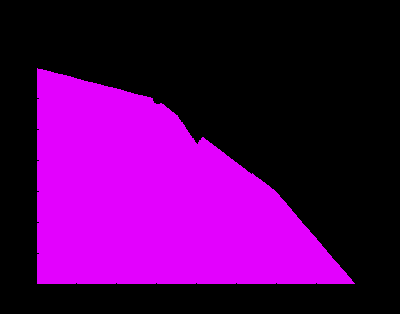
Sigue por la arista FH, hasta llegar a H, donde se para y despliega los datos de la Tabla III. En ésta tercera iteración se ha calculado el valor que corresponde al vértice H(6,6): Z = f(6,6) = 30.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla III . Iteración nº 3** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P2 | 2 | 6 | 0 | 1 | 3 | 0 | -2 |
| P4 | 0 | 12 | 0 | 0 | -7 | 1 | **4** |
| P1 | 3 | 6 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| **Z** |  | 30 | 0 | 0 | 3 | 0 | -1 |



Se Continúa haciendo cálculos a través de la arista HG, hasta llegar al vértice G. Los datos que se reflejan son los de la Tabla IV, concluyendo con la misma y advirtiendo que ha terminado (comprobando antes que la solución no mejora al desplazarse por la arista GC).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla IV . Iteración nº 4** | | | | | | | |
|  |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **Base** | **Cb** | **P0** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| P2 | 2 | **12** | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 0 |
| P5 | 0 | 3 | 0 | 0 | -7/4 | 0 | 1 |
| P1 | 3 | **3** | 1 | 0 | -3/4 | 0 | 0 |
| **Z** |  | **33** | 0 | 0 | 5/4 | 0 | 0 |



El valor máximo de la función objetivo es 33, y corresponde a x = 3 e y = 12 (vértice G). Además, se puede comprobar que el valor de la función en el vértice C (0,14), no supera el valor 33.

EJERCICICOS

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

**1**. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A y como mínimo 60.000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución

Es un problema de programación lineal.

Llamamos **x** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo A

Llamamos **y** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo B

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | inversión | rendimiento |
| Tipo A | x | 0,1x |
| Tipo B | y | 0,08y |

                                                                                         210000               0,1x+0,08y

Condiciones que deben cumplirse (restricciones):

http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image002.gif

http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image003.gif

http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image004.gifR1    http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image005.gif

  R2    http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image006.gif

  R3    http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image007.gif

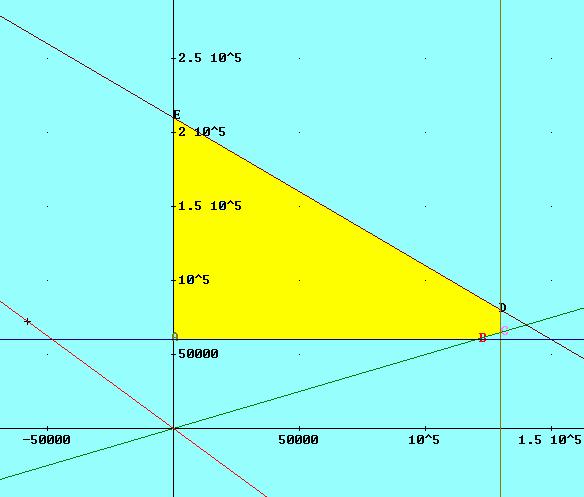
  R4        http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image008.gif

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones para conseguir la región factible (conjunto de puntos que cumplen esas condiciones)

         r1r2 (paralela a OY)                      r3(paralela a OX)                           r4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** |  | **x** | **y** |  | **x** | **y** |  | **x** | **y** |
| 0 | 210000 |  | 130000 | 0 |  | 0 | 60000 |  | 0 | 0 |
| 210000 | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 130000 | 65000 |

La región factible es la pintada de amarillo, de vértices A, B, C, D y E



A(0, 60000), B(120000, 60000), C(130000, 65000), D(130000, 80000) y E(0, 210000)

La función objetivo es;

**F(x, y)= 0,1x+0,08y**

 Si dibujamos la curva F(x, y) =0 (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice  mas alejado es el **D, y por tanto es la solución óptima.**

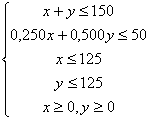
Comprobarlo analíticamente (es decir comprobar que el **valor máximo de la función objetivo,  F,**  se alcanza en el vértice **D**)

**2.** En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 250 Pts, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 Ptas. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer mas de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuantas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?

 Solución

En primer lugar hacemos una tabla para organizar los datos:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tipo | Nº | Bizcocho | Relleno | Beneficio |
| T. Vienesa | x | 1.x | 0,250x | 250x |
| T. Real | y | 1.y | 0,500y | 400y |
|  |  | 150 | 50 |  |

Función objetivo (hay que obtener su máximo):  f(x, y)=250x+ 400y   
Sujeta a las siguientes condiciones (restricciones del problema):   


Consideramos las rectas auxiliares a las restricciones y dibujamos la región factible:

Para    0.25x+0.50y=50, ó  x + 2y=200

|  |  |
| --- | --- |
| x | Y |
| 0 | 100 |
| 200 | 0 |

Para   x + y =150

|  |  |
| --- | --- |
| x | Y |
| 0 | 150 |
| 150 | 0 |

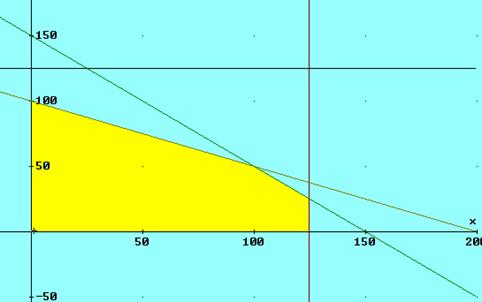
La otras dos son paralelas a los ejes

Al eje OY    x=125

Al eje Ox      y =125

Y las otras restricciones (x e y mayor o igual a cero) nos indican que las soluciones deben estar en el primer cuadrante

La región factible la hemos coloreado de amarillo:



Encontremos los vértices:

El  **O**(0,0), el  **A**(125, 0) y el  **D**(0, 100) se encuentran directamente (son las intersecciones con los ejes coordenados)

Se observa que la restricción yhttp://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image012.gifes redundante (es decir “sobra”)

Resolviendo el sistema:

http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image013.gif, por reducción obtenemos y=50, x=100

**Otro  vértice es el punto**  **C(100, 50)**

Y el último  vértice que nos falta se obtiene resolviendo el sistema:

X+y=150

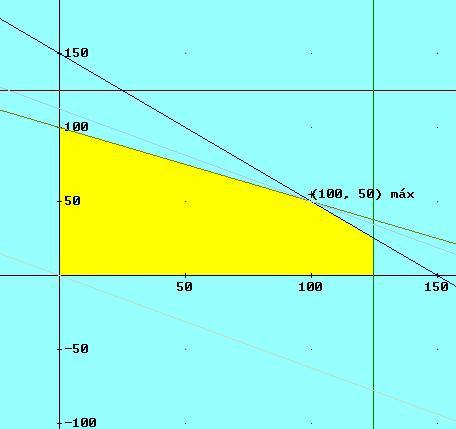
X=125

**Cuya solución es: X=125,  Y=25  B(125, 25)**

Los vértices de la región son O(0,0), A(125,0), B(125,25) y C(100,50) y D(0,100),

Si dibujamos el vector de  dirección de la función objetivo f(x, y)=250x+ 400y   
Haciendo 250x+ 400y =0,   y=-(250/400)x=-125x/200

|  |  |
| --- | --- |
| x | Y |
| 0 | 0 |
| 200 | -125 |



Se ve gráficamente que la solución es el punto (100, 50), ya que es el vértice mas alejado (el último que nos encontramos al desplazar la rectas 250x+400y=0 )

Lo comprobamos con el método analítico, es decir usando el teorema que dice que si existe solución única debe hallarse en uno de los vértices

La unción objetivo era:  f(x, y)=250x+400y, sustituyendo en los vértices obtenemos

f(125,0)=31.250

f(125,25)=31.250+10.000=41.250

**f(100,50)=25.000+20.000=45.000**

f(0,100)=40.000

El máximo beneficio es 45.000 y se obtiene en el punto (100, 50)

Conclusión:  se tienen que vender 100 tartas vienesas y 50 tartas reales.

**3**. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros. Calcular cuantos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela.

Solución

Es un problema de programación lineal, en este caso lo que queremos es hacer mínima la función objetivo.

Llamamos **x** al nº de autocares de 40 plazas e **y** al nº de autocares de 50 plazas que alquila la escuela.

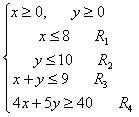
Entonces se tiene   **x** http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image015.gif , **y**http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image016.gif

Como sólo hay 9 conductores se verifica que: **x +y** http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image017.gif

Como tienen que caber 400 alumnos se debe de verificar:

40x +50y http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image018.gif, que simplificada quedaría 4 x +5y http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image019.gif

Por lo tanto las **restricciones** que nos van a permitir calcular la  región factible (conjunto de puntos solución donde se cumplen todas las condiciones) son



La función objetivo es F(x, y)= 60x+ 80y

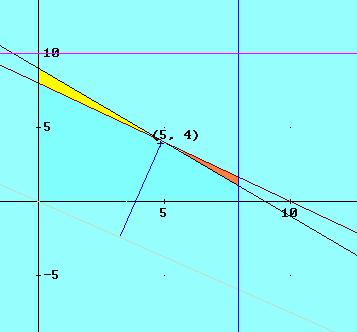
Dibujamos las rectas auxiliares,

r1 r2                         r3 r4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** |  | **x** | **y** | **x** | **y** | **x** | **y** |
| 8 | 0 | 0 | | 10 | 0 | 9 | 0 | 8 |
|  |  |  | |  | 0 | 9 | 10 | 0 |

Así como la de que corresponde a F(x, y)=0 que se dibuja en rojo.

Teniendo en cuenta las restricciones ( la de  R4 es la parte de arriba  y que la R3 es la parte de abajo), se encuentra la región factible. En el dibujo es la parte amarilla.



Los vértices son (0, 8), (0, 9) y el **(5, 4),** este último es el punto de intersección de las rectas r3 y r4

http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image022.gifpor reducción http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image023.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image024.gif

restando ambas ecuaciones se tiene **x =5** y sustituyendo en la 1ª ecuación, **y =4**

Resolviendo gráficamente se llega a que el punto (5, 4) es la solución del problema.  La solución óptima .

Comprobarlo sustituyendo en F(x, y) todos los vértices y que este es el que da menor valor (método analítico).

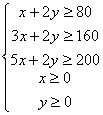
4. Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina  para que el coste sea mínimo?.

Solución

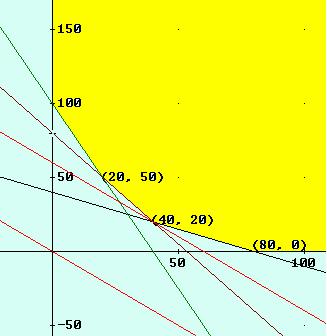
Organizamos los datos en una tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **días** | **Alta calidad** | **Calidad media** | **Baja calidad** | **Coste diario** |
| **Mina A** | x | 1x | 3x | 5x | 2000x |
| **Mina B** | y | 2y | 2y | 2y | 2000y |
|  |  | 80 | 160 | 200 |  |

La función objetivo C(x, y)=2000x + 2000y

Las restricciones son:                                  

La región factible la obtenemos dibujando las rectas auxiliares: r1 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image026.gifx + 2y=80, r2 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image026.gif3x + 2y= 160 y r3http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image026.gif5x + 2y=200 en el primer cuadrante  y considerando la región no acotada que determina el sistema de restricciones:



Los vértices son los puntos A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0), que se encuentran al resolver el sistema que determinan dos a dos las rectas auxiliares y (y que estén dentro de la región factible).

r1 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image028.gifr2 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image026.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image029.gif  que nos da el punto (40, 20) (comprobarlo)

r2 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image028.gifr3 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image026.gif http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image030.gif que nos da el punto (20, 50)

r1 http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image028.gifr3 no hace falta calcularlo pues queda fuera de la región factible.

En la gráfica se aprecia que el primer punto que se alcanza al desplazar la recta C(x, y)=0 es el (40, 20). Luego la solución es trabajar 40 días en la mina A y 20 en la B. (método gráfico)

Lo comprobamos  aplicando el método analítico:

C(0, 100)=2000.100=200000

C(20, 50)=2000.20+2000.50=40000 + 100000= 140000

C(40, 20)= 2000. 40+2000.20=80000 + 40000= 120000          coste mínimo

C(80, 0)= 2000.80 =160000

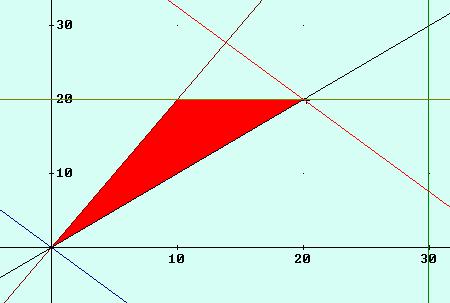
**5.** Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?

Sea     x = nº electricistas

          y = nº mecánicos

La función objetivo

                   f (x, y)=250x+ 200y ,  las restricciones http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image031.gif

La región factible sería para estas restricciones:  


Se aprecia gráficamente (línea en rojo) que la solución óptima está en el punto (20, 20).

Por tanto:

20 electricistas y 20 mecánicos dan el máximo beneficio, y este es 9000 euros, ya que f(x, y) =250.20+200.20=9000

**6**. Para recorrer un determinado trayecto, una compañía aérea desea ofertar, a lo sumo, 5000 plazas de dos tipos: T(turista) y P(primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de 30 euros, mientras que la ganancia del tipo P es de 40 euros.

El número de plazas tipo T no puede exceder de 4500 y el del tipo P, debe ser, como máximo, la tercera parte de las del tipo T que se oferten.

Calcular cuántas tienen  que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas.

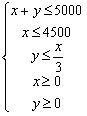
Solución

Sea x el nº que se ofertan de tipo T, y el nº que se ofertan de tipo P.

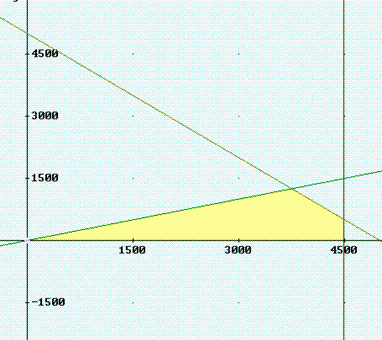
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | nº | Ganancia |
| Turista | x | 30x |
| Primera | y | 40y |
| Total | 5000 | 30x +40y |

La función objetivo es:

f(x, y)=30x +40y

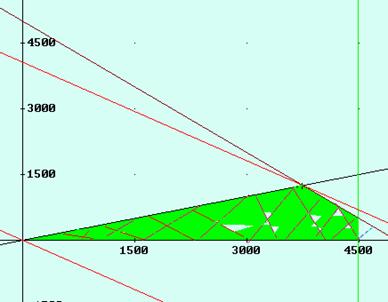
Las restricciones:

La región factible:



Los vértices, A(0, 5000), B(3750, 1250), C(4500, 500) y D(4500, 0) (comprueba el punto B resolviendo el sistema correspondiente)

El método gráfico nos da que el punto solución es el B (3750, 1250)



Comprueba los resultados usando el método analítico (sustituyendo los puntos vértices en f y viendo q el máximo valor se obtiene en B)

**Continuará**

Si quieres más ejercicios visita [**Ejercicios modelo exámenes**](http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo.htm) **, y los** [**de Selectividad**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm)

[***Cuaderno para 2º Bach***](http://carmesimatematic.webcindario.com/objetivossegundo.htm)[***Matemáticas en el bachillerato***](http://carmesimatematic.webcindario.com/M.bachillerato.htm)

[http://actividadesinfor.webcindario.com/proli_archivos/image036.gif](http://carmesimatematic.webcindario.com/)

 EJERCICIOS MODELO ( Y PROPUESTOS EN EXÁMENES)

image051 **TEMA: ECUACIONES Y SISTEMAS**

**1**-En una competición deportiva participan 50 atletas distribuidos en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte excede en una unidad al número de cadetes y por otra, coincide con el quíntuplo del número de juveniles. Determina el número de atletas que hay en cada categoría.

Solución

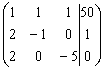
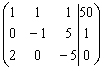
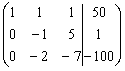
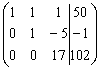
Llamamos: **x** al número de atletas infantiles, **y** al número de atletas cadetes, **z** al número de atletas juveniles

Se verifica http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image006.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image007.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif x =15, sustituyendo se obtiene y = 29, y =6

**Nota. También lo podríamos resolver aplicando el método de Gauss**

Se trata de conseguir una matriz escalonada de más fácil resolución ..

La matriz es http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image009.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image009.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image009.gif....

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image013.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image014.gif

Comprobar el resultado.

**2**. Encuentra los valores de **a** para que la siguiente matriz, A,  no sea inversible y halla la inversa para a =1 http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image015.gif

Solución

Para que no sea inversible el determinante debe dar 0.

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image016.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif7a-21=0 http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif**a =3**

Calculamos la inversa para a =1, si a =1 el valor del determinante es -14.

Se calcula la adjunta de A,  Adj A =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image017.gif , se traspone, (Adj A)’ =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image018.gify por último dividimos por el determinante de A, http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image019.gif

Comprobar el resultado multiplicando A por su inversa, A-1,( A.A-1 =I).

**3.** Calcula la matriz X tal que  **XA-2B =C,** donde http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image020.gif, http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image021.gif y http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image022.gif

Solución

**XA-2B =C** http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifXA =2B+ C http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif XA =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image023.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image024.gif= http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image025.gif; Xhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image026.gif=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image027.gif

 de donde **X** =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image025.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image028.gif=\* http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image029.gif

\*la inversa comprueba que es A-1=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image030.gif, por el método que prefieras.

**4**. Discute y resuelve el sistema en los casos posibles

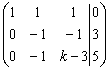
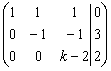
http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image031.gif

Solución

Como el parámetro k solo está en una ecuación y en la z, el método de Gauss en este caso nos parece el más conveniente.

Cambiamos el orden de las ecuaciones para más sencillez

                , q ya es escalonado: 

**Discusión**

Si k-2 distinto de cero, es decir si k distinto de 2, el sistema es compatible determinado (solución única)

Si k-2=0, es decir k =2, quedaría 0z=2, y el sistema sería incompatible.

Resolvemos para k distinto de 2: de aquí ,

Resolviendo de abajo a arriba,

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image038.gif

y =-3-http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image039.gif=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image040.gif

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image041.gif

(Comprobar los resultados haciendo el ejercicio usando la regla de Cramer)

**5**. En cierta heladería  por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34   un día. Otro día por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 €, y un tercer día te piden 26 € por una horchata y 4 batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

Solución

Planteamiento:

Llamamos x al precio de la copa de la casa

             y  al precio de la horchata

             z  al precio del batido

Se tiene:

x +2y+ 4z=34

4x+ 4y     =44, simplificando  x + y = 11   (**1 )**

        y +4z=26

Si restamos las ecuaciones 1ª y 3ª se tiene:

x +y = 8 por lo que el sistema es incompatible  (ver **1)**

**6**. a) Calcula la inversa de la matriz A =,    comprueba el resultado.

b) Resuelve la ecuación matricial  XA – C = 2 B, donde:

A =,    B =  ,    C =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image045.gif

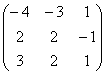
Solución

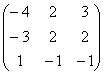
Primero calculamos el determinante de A para comprobar que en efecto existe la inversa.

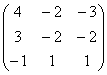
http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image046.gif=-1, es distinto de 0, luego hay inversa.

Después calculamos la matriz adjunta de A, cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A

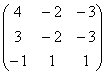
A11=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image047.gif; A12=(-1)1+2http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image048.gif..............., es decir

Adj A= , después trasponemos la matriz adjunta

(Adj, A)t= , y por último dividimos por el determinante. Nos queda:

A-1= http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image051.gif= 

Para comprobar el resultado, multiplicamos por la matriz A (en ambos sentidos) y nos tiene que dar la identidad:

A-1.A=.= (Comprobarlo en el otro sentido)

b) Se tiene:

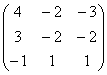
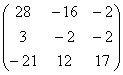
XA =2B+ C, como la matriz A tiene inversa (apartado a)), multiplicamos a ambos lados para despejar la X:

XA .A-1= (2B+ C). A-1, de donde:

X = (2B+ C).A-1

Calculamos pues, 2B+ C:

 (2B+ C)= , multiplicando por la inversa de A:

X = .=

**7**. En una reunión hay 40 personas. La suma del número de hombres y mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres excede en 6 a la suma del número de hombres más el número de niños. Averiguar razonadamente cuántos hombres, mujeres y niños hay.

Solución

Llamamos:

x  al nº de hombres

y al nº de mujeres

z al nº de niños

Se tiene:



Restando las dos primera ecuaciones, se obtiene 4z=40, de donde **z =10**.

Sustituyendo:

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image059.gif   Sumando 2y=46,    **y =23**,        **x =7**

**Hacerle usando el método de Gauss**

**Por tanto tenemos motivos para pensar que nos han presentado algún día una cuenta incorrecta**

**6.** Se considera la matriz

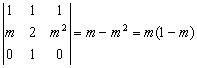
A = 

a) Determinar los valores de m para los que el determinante de A sea cero.

 b) Resolver para  m = 1 el sistema.

A 

**Solución**

a) http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image062.gif

Por lo tanto el determinante de a es 0 para m =0 y m =1.

b) Si m =1, la matriz A nos queda:

A =y el sistema que nos plantean es: ,

Operando nos quedaría:

x+y+z=0

x+2y+z=2

   y=     -1

Restando las ecuaciones 1ª y 2ª , nos queda y=2 , por lo tanto el sistema es incompatible.

Terminarle.

**7.** Compro 100 regalos de diferentes precios, 25 euros, 5 y 0.25 euros y me gasto en total 500 euros, ¿cuántos regalos he comprado de cada cantidad exactamente?

Solución

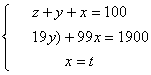
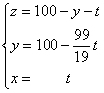
Llamamos x, y, z al número de regalos de 25 euros, de 5 euros y de 0,25 euros, respectivamente.

Entonces http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image065.gifMultiplicamos por 4 la segunda ecuación, http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image066.gif

                                        z   y     x

Ordenamos las incógnitas http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image067.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image068.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image069.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image068.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image070.gif

Es un sistema indeterminado, hacemos x =t y la solución del sistema sería

 http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image068.gif

Las soluciones tienen que ser enteros positivos, y para que la **y** lo sea tiene que ser  t = 19, de donde x =19,  y =1 con lo que z =80

**SI NECESITAS MÁS EJERCICIOS VISITA:** [**Álgebra para 2º Bach MCS**](http://carmesimatematic.webcindario.com/algebra%202bach.htm) **y** [**Selectividad**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm)

image051 **TEMA: PROGAMACIÓN LÍNEAL**

1.-Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes de tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los de tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 euros por cada paquete que venda de tipo A y 5 euros por cada uno que vende de tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular éste.

Solución

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | nº | Cafeína | Sin Cafeína |
| A | x | 3x | 3x |
| B | y | 2y | 4y |
| Totales |  | 120 | 180 |

El conjunto de restricciones es:



Los vértices son A(0, 0), B(0, 45),  C(20, 30) y  D(40, 0) (comprobarlo dibujando la región factible).

La función objetivo es: beneficio =f(x, y)= 6x + 5y

Utilizando el método analítico, el máximo estará en uno de los vértices.

f(0, 0)= 0, f(0, 45)=225 **f(20, 30)= 120+150=270** y f(40, 0)=240

Es decir 20 paquetes de A y 30 de B

(Comprobarlo gráficamente)

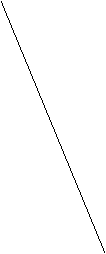
2. Una persona para recuperarse de una cierta enfermedad tiene que tomar en su alimentación dos clases de componentes que llamaremos A y B. Necesita tomar 70 unidades de A y 120 unidades de B. El médico le da dos tipos de dietas en las que la concentración de dichos componentes es:

**dieta D1: 2 unidades de A y 3 unidades de B**

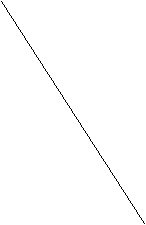
**dieta D2: 1 unidad de A y 2 unidades de B.**

Sabiendo que el precio de la dieta D1 es 2,5 €. y el de la dieta D2 es 1,45 €. ¿cuál es la distribución óptima para el menor coste?

Solución:

Lo resolveremos gráficamente.

Sean x e y el número de dietas D1 y D2 respectivamente.

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image076.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image077.gifLa función objetivo es:

**C(x,y) = 2,5 x + 1,45 y**

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image078.gifLas restricciones son :

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image079.gif**2x + y  70**

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image080.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image081.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image082.gif**3x + 2y  120                         (20,30)**

**x  0 ,  y 0**

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image083.gif

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image084.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image085.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image086.gifx        y

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image087.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image088.gif0       0

29   -50

Los vértices de la región factible son: (0,0),(0,60), (20,30) y (40,0)

Se observa en el gráfico que la solución óptima es 20 D1 y 30 dietas D2.

(Comprobarlo analíticamente)

**3.** Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivarmás de 8 ha con olivos de tipo A, ni más de 10 ha con olivos del tipo B. Cada hectárea

de olivos de tipo A necesita 4 m3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m3. Se dispone anualmente de 44 m3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente,

500 y 300 litros anuales de aceite:

a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.

b) Obtener la producción máxima**.**

Se trata de un problema de programación lineal.

Si x indica las hectáreas de olivo A e y las de B, el objetivo es maximizar:

P(x, y) = 500x + 300y

Restringido por:

x http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image089.gif 8

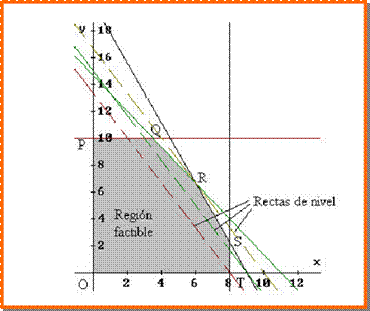
y http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image089.gif 10

4x + 3y http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image089.gif 44 (restricción por agua)

500x + 225y http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image089.gif 4500 (restricción por inversión)

x http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image090.gif 0; y  http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image090.gif0

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) dada en la siguiente figura.



Trazando las rectas de nivel, de ecuación 500x + 300y = k, y trasladándolas hacia la derecha,

según el vector (500, 300),  se observa que el nivel máximo se obtiene en el vértice R de coordenadas:

 R = (6, 20/3) (método gráfico).

Esta coordenadas son la solución del sistema: http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image092.gif (comprobarlo)

Hay que cultivar 6 hectáreas de olivo A y 20/3 hectáreas del tipo B.

b) La producción máxima es

P(6, 20/3) = 500 · 6 + 300 · (20/3) = 5000 litros

(Comprobarlo usando el método analítico)

**4**. Una empresa fabrica dos modelos de fundas de sofá, A y B, que dejan unos beneficios de 40 y 20 euros respectivamente. Para cada funda del modelo A se precisan 4 horas de trabajo  y 3 unidades de tela. Para fabricar una del modelo B se requieren 3 horas de trabajo y 5 unidades de tela. La empresa dispone de 48 horas de trabajo y 60 unidades de tela. Si a lo sumo pueden hacerse 9 fundas del modelo A. ¿Cuántas fundas de cada modelo han de fabricarse para obtener el máximo beneficio y cual seria este?

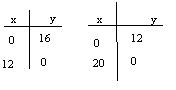
Solución

Es un problema de programación lineal. Hacemos una tabla para organizarnos

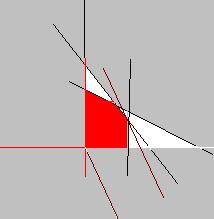
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Nº | Horas de trabajo | Unidades de tela |
| Modelo A | x | 4x | 3x |
| Modelo B | y | 3y | 5y |
| Totales |  | 48 | 60 |

Las restricciones son                            la función objetivo es f(x, y)=40x +20y

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones:



Dibujamos la región factible



Calculamos los vértices:

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image096.gif   36+ 3y =48http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gify =4  luego un vértice es (9, 4)

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image097.gif   lo resolvemos por reducción http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image098.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gif11y=96 http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image004.gify =96/11 , sustituyendo en la 1ª ecuación, x = 60/11

Los vértices son (0, 0), (9, 0), (9, 4), ( 60/11, 96/11) y (0, 12)

Por el método gráfico vemos que el máximo se alcanza en el punto (9, 4) .

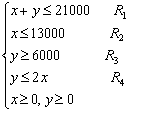
Comprobar este resultado utilizando el método analítico ( calcula el valor de la función objetivo en los vértices)

**5.** Disponemos de 21000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 7% y las del tipo B, que rinden el 9%. Decidimos invertir un máximo de 13000 euros en las del tipo A y como mínimo 6000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo B sea menor que el doble de la inversión en A. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | nª | Interés |
| Tipo A | x | 0,07x |
| Tipo B | y | 0,09y |
| Total | 21000 | 0,07x+0,09y |

Hay que optimizar la función objetivo: Z = 0,07x+0,09y, sujeta a las siguientes restricciones:



Representamos la región factible:

Rectas auxiliares:

r1  x +y= 21000

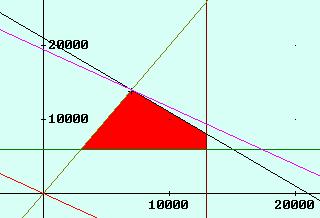
|  |  |
| --- | --- |
| x | y |
| 0 | 21000 |
| 21000 | 0 |

r2  x =13.000 (vertical)

r3 y =6.000 (horizontal)

r4   y =2x

|  |  |
| --- | --- |
| X | Y |
| 0 | 0 |
| 3000 | 6000 |



Los vértices son, (3.000,6000), (7.000,14.000), (13.000,8000), (13.000, 6.000)

Gráficamente obtenemos la solución óptima en el punto **(7.000, 14.000)**

Y el máximo beneficio será 1750 euros.

Comprobarlo analíticamente.

**SI NECESITAS MÁS EJERCICIOS VISITA:** [**OTROS PROBLEMAS DE P.L**](http://actividadesinfor.webcindario.com/proli.htm)

image051 **TEMA: CONTINUIDAD, DERIVADAS E INTEGRALES**

**1**. Dada la función F(x)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image101.gif

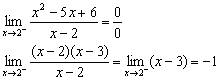
a)    hallar los puntos de discontinuidad

b)   Si existe alguno, hallar los limites laterales y el salto de discontinuidad

c)    Determinar si se puede completar el dominio de la función de modo que sea continua en toda la recta

Solución

a)    El único punto en que es discontinua es en x = 2, que anula el denominador.

b)     Lo límites laterales: 

         Análogamente cuando x tiende a 2+

         Como los límites laterales coinciden la discontinuidad **es evitable.**

      c)  El dominio de la función F es R-http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image103.gifComo la discontinuidad e evitable **sí** se puede “completar” el dominio con el 2, definiéndola en ese punto con el valor de dicho límite. Es decir:

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image104.gif   es continua

2.  Dada la función  F(x)= http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image105.gif, se pide:

a)    hallar los puntos de discontinuidad

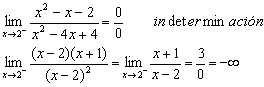
b)   Si existe alguno, hallar los limites laterales y el salto de discontinuidad

c)    Determinar si se puede completar el dominio de la función de modo que sea continua en toda la recta

Solución

a)    Como es un cociente de polinomios es discontinua en los puntos que anulan al denominador.

     x2-4x+4=0, x =2  (raíz doble) es el único punto de discontinuidad

b)   Los límites laterales:          (ya que x-2<0, para valores menores que 2)

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image107.gif (ya que x-2>0 para valores mayores que 2)

Es una discontinuidad de primero especie o de salto. El salto es **infinito**

Por ser una discontinuidad de salto no se puede definir.

**3**. Hallar p y q  para que la curva y = x2+ px +q contenga al punto (-2,1) y presente un mínimo en x =-3.

Solución

Si queremos que el punto (-2, 1) pertenezca a la curva tiene que verificarse:

1=(-2)2-2p +q, es decir,

**2p-q =3**

Si queremos que tenga un mínimo en el punto de abscisa x=-3, en dicho punto la derivada tiene que valer 0.

y ´= 2x+ p

y’(-3)=-6+ p =0

**p =6**

12-q =3, de donde q =9

**4.** Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertida, según la formula: R(x)=-0.002x2+0.8x-5 donde R(x) representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad x. Determinar, teniendo en cuenta que disponemos de 500 euros:

a) Cuando aumenta y cuando disminuye la rentabilidad

b) Cuanto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad posible.

c) Cual será el valor de dicha rentabilidad.

Solución

a) La derivada primera nos da el crecimiento o decrecimiento de la función. Si la derivada es positiva la función crece y si es negativa decrece

Procedimiento:

-Se deriva la función:

R`(x)=-0,004x+0,8

-Se iguala a 0 y se resuelve la ecuación que resulta:

R`(x)=0 , http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image108.gif

-Se estudia el signo de la derivada a la derecha e izquierda de los valores que nos ha dado 0 la derivada (en este caso x =200). Hay varios métodos, un muy mecánico:

                   f

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image109.gifhttp://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image110.gif

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image111.gif |  |  |
|  |  | http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image112.gif |
|  |  |  |

                   f ´              +       200    -

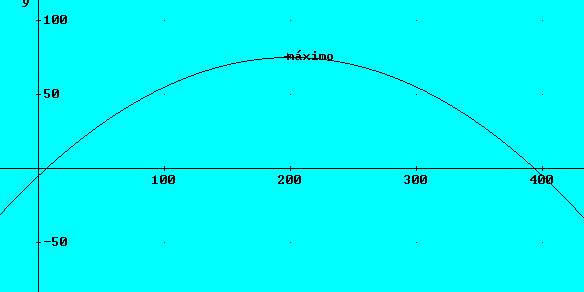
se coge un punto menor que 200, por ejemplo 100, y sustituimos R´(100)=0,4>0 y en otro mayor que 200 (por ejemplo 300) R´(300)=-0,4<0

Entonces la derivada es positiva en el intervalo (0, 200), y f es creciente en ese intervalo y es decreciente en (200, 500) ya que en ese intervalo nos ha dado negativa la derivada. Lo que nos dice también que en punto 200 hay un máximo local

b) Teniendo en cuenta el apartado a debemos invertir 200 euros.

c) La máxima rentabilidad es R(200)= -0,002.(200)2+0,8.200-5=75 euros

**Solución gráfica**



**5.** La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función V(t)= 40+15t-9t2+t3, donde t es el tiempo(en horas) transcurrido desde que comienzo en estudio (t=0). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas  y los intervalos en que esta crece y decrece.

Solución

Para que la función  tenga un máximo o un mínimo la derivada debe ser cero.

 V´(t)= 15-18t+3t2, igualando a 0, 3t2-18t+15=0

Simplificando  t2-6t+5=0, cuyas soluciones son 5 y 1.

Ahora voy a ver  quien  es el máximo y quien el mínimo de la función, en el intervalo [0, 6], que tiene que estar entre estos dos valores junto o en los extremos del intervalo (por el teorema de Weiertrars).

Ordeno la función V por comodidad, V(t)= t3-9t2+15t+40

V(0)=40

V(5)=125-225+75+40 =15

V(1)=1-9+15+40= 47

V(6)=216-324+90+40=22

La máxima virulencia es a las 1 horas y la mínima a las 5 horas.

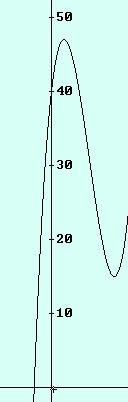
Para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada: V’(t)=3t2-18t+15

     0        1                       5             6

V’        +    0          -        0        +

Luego V crece desde 0 a 1  y desde 5 a 6, (crece en  (0, 1) unión (5, 6) ) y decrece en el intervalo (1, 5)

Observando la gráfica de esta función vemos lo q hemos deducido.



6. Un coche de competición se desplaza a una velocidad que, entre las 0 y 2 horas, viene dada por la expresión v(x)= (2-x).ex, donde x es el tiempo en horas y v(x) es a velocidad en cientos de kilómetros. Hallar en que momento del intervalo http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image115.gifcircula a la velocidad máxima y calcular dicha velocidad. ¿En que periodos gano velocidad y en cuales redujo? ¿Se detuvo alguna vez?

SOLUCIÓN

Nos piden q estudiemos el crecimiento y decrecimiento y el máximo de la función velocidad v.

Por eso utilizamos la derivada, ya que sabemos (por teoría) que si la derivada da positiva la función crece y si da negativa decrece. También sabemos que, la función tiene un máximo relativo en un punto, si la derivada, en ese punto, es 0 (condición necesaria) y además cambia el crecimiento (es decir pasa de crecer a decrecer)

La derivada es:

v’(x)=-1.ex + ex.(2-x)= -ex + 2 ex- x .ex = ex- x. ex, sacando factor común  ex se llega a:        v’(x)=((1-x)ex

Igualando a 0 nos  da (1-x).ex =0, de donde 1-x =0 y por tanto  x =1, (ya q ex nunca puede ser cero)

Estudiamos v en los alrededores de 1

v ‘      +        1        -        2

y        crece          decrece

Por lo tanto en x=1 hay máximo y la función crece de 0 a 1 (gana velocidad) y decrece de 1 a 2 (reduce velocidad), veamos los valores en ese punto y en el extremo:

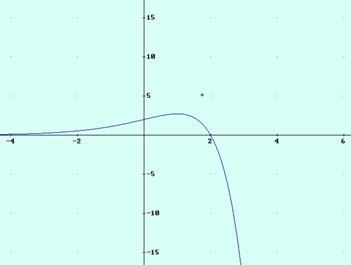
v(x)= (2-x)ex

v(1)=(2-1).e = e (aquí el máximo como justificamos antes)

v(0)=(2-0).1=2

v(2)=(2-2).1=0       como da la velocidad  0 aquí se detuvo.

LA GRÁFICA:



(No es necesaria la gráfica solo la pongo para ayudar a entender lo que se hace, vemos que pasa justo lo que hemos deducido entre 0 y 2)

**7**. La cantidad de agua recogida en 2002 (en millones de litros), en cierto pantano, como función del instante de tiempo t (en meses), viene dada a través de la expresión

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image117.gif http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image118.gif

 Se pide:

a)  En que periodo de tiempo aumento la cantidad de agua recogida?

b) En que instante se obtuvo la cantidad máxima de agua?

c) Cual fue esa cantidad máxima?

Solución

Teniendo en cuenta la regla de derivación de un cociente:

Si http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image117.gif,  su derivada es     f’(t)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image119.gif

Y si queremos que sea cero, tiene que ser cero el numerador, de donde t =6

Señalamos el punto 6 en la recta y estudiamos el crecimiento de la función, f,  entre 0 y 12 (viendo el signo del numerador solo, pues el denominador siempre es positivo)

0                          6                          12

f ’      +                           -

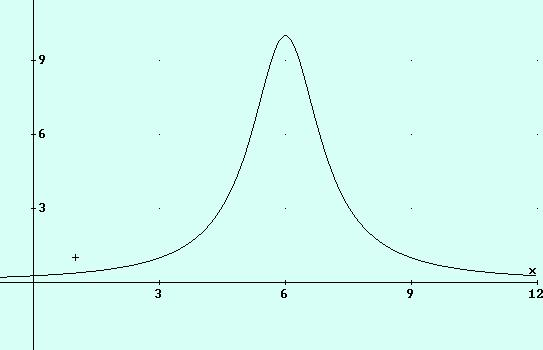
Crece hasta el 6 y decrece desde el 6

Por lo tanto en 6 tiene un máximo relativo, que en este caso es absoluto (pues en el infinito da 0) y se tiene:

a) la cantidad aumenta en el periodo de 0 a 6

b) en t =6

c) f(6)=10/1=10



NOTA IMPORTANTE: EN ESTE TIPO DE PROBLEMAS CASI **NUNCA** ES ACONSEJABLE DESARROLLAR  EL DENOMINADOR.

Problema propuesto:

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresa depende del precio de venta de acuerdo con la función B(x)=2x-x2-0.84, siendo B(x) el beneficio por kilogramo, expresado en euros, cuando x es el precio de cada kilogramo también en euros.

a)    Entre que precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista.

b)   Que precio por kilogramo maximiza los beneficios para este.

c)    Si tiene en el almacén 10.000 kilogramos de fresas ¿Cuál será el beneficio total máximo que podría obtener.

Si tienes alguna duda visita [el foro](http://miarroba.com/foros/ver.php?id=356242) y te ayudamos.

**8.** Hallar el área comprendida entre la función f(x)=-x2+2 x + 3 y la recta y =x +1

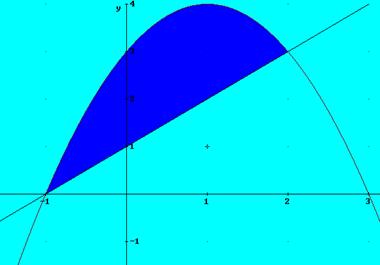
Solución

Dibujamos la parábola y la recta sobre los mismos ejes.

Los puntos de corte de las dos curvas los calculamos resolviendo el sistema

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image121.gif

(comprobar que dan los q se aprecia en el dibujo, (-1, 0) y (2, 3)



El área encerrada por las curvas es la integral desde -1 hasta 2 (abscisas de los puntos de corte son los límites del a integral) de la función f1 –f2 , donde en este caso f1 es la parábola, pues es la curva que queda por arriba entre -1 y 2, y f2 es la recta que como se ve queda por debajo.

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image123.gif=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image124.gif= G(2)-G(1)

Llamamos G a una primitiva de y =http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image125.gif , G(x) = http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image126.gif (comprueba que lo es derivando y viendo q coinciden)

Entonces, usando la regla de Barrow, el área encerrada es,  G(2)-G(-1)=9/2

**Si quieres mas modelos de integrales definidas resueltos visita este enlace:** [**INTEGRALES MODELO**](http://actividadesinfor.webcindario.com/INTEGRALESMODELO.htm)

**SI NECESITAS REUMEN TEÓRICO:** [**INTEGRAL DEFINIDA (LOGSE)**](http://actividadesinfor.webcindario.com/integral%20definidalogse.htm)

**SI NECESITAS MAS EJERCICIOS DE ESTA PARTE VISITA SOLUCIONES** [**SELECTIVIDAD JUNIO 2004**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

image051 **TEMA: PROBABILIDAD**

1. Se desea  “conocer” si los accidentes tienen alguna relación con la marca del coche. Se han observado para ello a lo largo de un año 100000 coches de tres marcas, SEAT, VOLVO  y AUDI, la siguiente tabla recoge la información obtenida[[C1]](http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo.htm" \l "_msocom_1) :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **SEAT** | **VOLVO** | **AUDI** |
| **ACCIDENTES (AC)** | 500 | 200 | 300 |
| **NO AC** | 59600 | 19800 | 19600 |

Con los datos obtenidos estudiar si es más probable tener un accidente con un coche de una marca que de otra.

Solución

Completamos la **tabla de contingencia:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **SEAT** | **VOLVO** | **AUDI** |  |
| **ACCIDENTES** | 500 | 200 | 300 | 1000 |
| **NO AC** | 59600 | 19800 | 19600 | 99000 |
|  | 60100 | 20000 | 19900 | 100000 |

La probabilidad total de que un determinado coche tenga un accidente es P(AC)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image127.gif

La tabla nos permite calcular las probabilidades de que un coche de una determinada marca tenga un accidente:

P(AC/SEAT)= http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image128.gif; P(AC/VOLVO)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image129.gif y P(AC/AUDI)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image130.gif

Con estos  datos a priori podemos afirmar que la más segura es la SEAT y la menos la AUDI, y también se observa que los sucesos VOLVO y AC son independientes (P(AC/VOLVO)= P(AC)), pero no así con las otras dos marcas.

Por otra parte si entre los 1000 coches que han tenido un accidente elegimos uno al azar:

P(SEAT/AC)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image131.gif; P(VOLVO/AC)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image132.gif; P(AUDI/AC)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image133.gif, en el que vemos de igual forma que

ha disminuido la probabilidad de SEAT, al saberse que ha ocurrido un accidente, y aumentado la de AUDI. La de VOLVO quedó igual, debido que eran independientes.

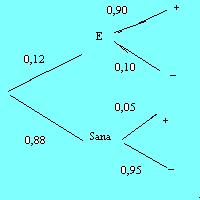
**2**.  En cierto país, donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar esa enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba ha dado positiva?

Solución

P(enferma)= 0,12

P(+/enferma)=0,90, P(+/sana)=0,05

Utilizamos un diagrama de árbol para solucionar el problema:



En primer lugar calculamos la probabilidad de que la prueba dé positiva:

P(+) = 0,12.0,90 + 0,88.0,05 = 0,152

Luego calculamos la probabilidad de que una persona sana de positiva:

P(S, +)= 0,88.0,05= 0,044

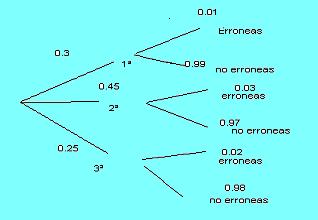
La razón entre estas dos cantidades es la probabilidad pedida, es decir:

P(S/+)= P(S, +)/P(+)=0,044 /0, 152=0,289

**3**. En una asesoría fiscal se ha contratado a tres personas para hacer declaraciones de renta. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las declaraciones por la primera persona, el 1% son erróneas, la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos. Calcula la probabilidad de que, al elegir al azar una declaración de renta, esta sea errónea. Al elegir una declaración que resulto correcta, ¿Cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

Solución

**a)** eneste caso el diagrama de árbol es**:**



 p(sea errónea))=p(errónea/realizada por 1ª persona)p(realizada 1ª persona)+p(errónea/realizada por 2ª persona)+ p(errónea/realizada por 3ª persona)= 0,3.0,01+0,45.0,03+0,25.0,02=0,003+0,0135+0,005=0,0215

**b**)  En primer lugar se tiene que:

 p(correcta)= 1-p(errónea) =1-0,0215=0,9785

p(realizado la segunda persona/correcta)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image136.gif

**Observación**: La justificación matemática de esta forma de resolución está en la aplicación del **teorema de la probabilidad total y de la fórmula de Bayes**

         p(B)=p(B/A1).p(A1)+p(B/A2).p(A2)+……….+p(B/An).p(An)

http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image137.gif)

**4**. Un alumno realiza un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si escoge las respuestas al azar.

Solución

Es una distribución binomial  donde n = 4 y X es el número de preguntas contestadas correctamente (=aciertos). La probabilidad de X =k  aciertos nos la da la fórmula p(X=k)=http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo_archivos/image138.gif

p = P(acertar)=1/3, q = 2/3

P(aprobar)= P(X =2)+P(X =3)+P(X =4) = 6.(1/3)2.(2/3)2 + 4. (1/3)3.(2/3)+(1/3)4= 0,40 (comprobarlo)

(El problema también se puede resolver usando un diagrama de árbol, en el caso de no haberse estudiado el tema de distribuciones de probabilidad)

**SI NECESITAS MAS EJERCICIOS, O TEORÍA, DESCARGATE EL ARCHIVO** [**PROBABILIDAD**](http://carmesimatematic.webcindario.com/probabilidad2.zip)

**CONTINUARÁ**

Si quieres problemas propuestos en selectividad visita [Selectividad](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm)

[***Cuaderno para 2º Bach***](http://carmesimatematic.webcindario.com/objetivossegundo.htm)

[image019](http://carmesimatematic.webcindario.com/)

 ***Esta página está dedicada a recoger  ejercicios de Selectividad de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, de la Comunidad Valenciana, contiene los criterios de corrección y  enlaces a las soluciones de los problemas propuestos.***

***SELECTIVIDAD LOGSE***

***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II***

**SELECTIVIDAD JUNIO 2006**

**EJERCICIO A**

**Problema 1.** Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250000 euros en terreno industrial y 250000 euros en terreno rústico. La segunda,  invirtió 125000, 250000 y 125000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera , 100000, 100000 y 200000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es de 13,75 %, la de la segunda es del 11,25 % y, finalmente, la de la tercera es del 10%. Determinar la rentabilidad de cada uno de los terrenos por separado.

**Problema 2.** Dada la función y = x3+ x2 -5x+3, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales.

d) Representación gráfica a partir de la información de los  apartados anteriores.

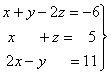
**Problema 3.** Los beneficios anuales B(x), en miles de euros, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde x representa el número de años a partir del actual:

http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image002.gif

**Problema 4.** Sean A y B dos sucesos tales que P(Ahttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image003.gif)=0,9; P(A’)=0,4, donde A’ denota el suceso contrario del suceso A y http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image004.gif. Calcula las probabilidades siguientes: P(B), P(A/B), http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image005.gify

**EJERCICIO B**

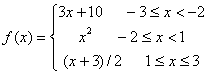
**Problema 1. R**esuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales  utilizando el método de Cramer:



**Problema 2.** Una refinería de petróleo adquiere dos tipos de crudo, ligero y pesado, a un precio de 70 y 65 euros por barril, respectivamente. Con cada barril de crudo ligero la refinería produce 0,3 barriles de gasolina 95, 0,4 barriles de gasolina 95 y 0,2 barriles de gasoil. Asimismo, con cada barril de crudo pesado produce 0,1, 0,2 y 0,5 barriles de cada uno de estos tres productos respectivamente. La refinería debe suministrar al menos 26300 barriles de gasolina 95, 40600 barriles de gasolina 98 y 29500 barriles de gasoil. Determina cuántos barriles de cada tipo de crudo debe comprar la refinería parar cubrir sus necesidades de producción con un coste mínimo y calcula éste.

**Problema 3.**

**a)** Estudia la continuidad en el intervalo [-3, 3] de la función



**b)** Halla la integral entre 2 y 3 de la función f(x) = 2x3-3x+2

**Problema 4.** El volumen de producción diario en tres fábricas de una empresa es de 1000 unidades en la primera fábrica, 1500 unidades en la segunda y 2500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto, lo son el 1% de las unidades en las dos primeras fábricas y el 3% de las producidas en la tercera.

a) ¿Qué proporción de unidades fabricadas son correctas?

b) Si se tiene una unidad defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fábrica?

## 

**SELECTIVIDAD JUNIO 2004**

**EJERCICIO A**

**Problema 1**. Dadas las matrices:

http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image008.gif     http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image009.gif     http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image010.gif

Calcular la matriz X que verifica la ecuación **AXB =2C**

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos  de riesgo alto y medio , con rendimientos del 14% y 7% respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función f(x)=28x2 + 36000x, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función G(x)= 44x2 + 12000x + 700000, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

a) La función que define el beneficio en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.

c) El beneficio máximo.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De éstos, el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tengo menos de 20 años.

b) Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no era español y tenga 20 años o más

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

EJERCICIO B

**Problema 1.** Juan decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y en C juntas. Transcurrido un año. Las acciones de la empresa a se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 € . Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** La parte superior de una pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión  -0,5 x2 + x + 1, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** La máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos de 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.

b) La probabilidad de que esté fabricada en la máquina a, si sabemos que es defectuosa.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

## CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Todos los problemas valdrán lo mismo. Los criterios se han establecido con la base de que cada problema se puntuará de 0 a 10. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas. En caso de contestación de los cuatro problemas sólo se corregirán los tres primeros que se contesten.

EJERCICIO A

**Problema 1.** Por el planteamiento de 0 a 4 puntos. Por la obtención de la matriz X =http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image011.gifde 0 a 6 puntos.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Por el planteamiento de 0 a 4 puntos. Por la determinación de la región factible de vértices (0, 4), (16/5, 4), (8, 10) y (0, 18) de 0 a 3 puntos. Por la solución correcta (8, 10) de 0 a 2 puntos. Por el cálculo del máximo (f(8, 10)=1,82 millones de euros) de 0 a 1. Si la solución se obtiene por cualquier otro método correcto de 0 a 10 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** Por la obtención de la función B(x)= -16 x2+ 24000x-700000 de 0 a 4; por la obtención del número de unidades que han de ser vendidas (750) de 0 a 4 puntos y de 0 a 1 por la justificación de que es máximo. Por el cálculo del beneficio máximo (8300000 euros) de 0 a 1 punto.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** Por el cálculo razonado de la primera probabilidad (0, 36) de 0 a 5 puntos y por el cálculo de la segunda probabilidad (0,28) de 0 a 5 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

EJERCICIO B

**Problema 1.** Por el planteamiento de 0 a 4 puntos. Por la obtención de la solución (8000 euros en A, 2750 euros en B y 1250 euros en C) de 0 a 6 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Por el planteamiento de 0 a 4 puntos. Por la determinación de la región factible de vértices (12, 15), (12, 6) y (18, 9) de 0 a 3 puntos. Por la solución correcta ((18, 9)) de 0 a 2 puntos. Por el cálculo del máximo (f(18, 9)=12960) de 0 a 1. Si la solución se obtiene por otro método razonado y correcto se puntuará de 0 a 10 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** Por el planteamiento de la integral de 0 a 6 puntos y por la obtención de la superficie (8/3 m2) de 0 a 4 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** Por el cálculo razonado de la primera probabilidad (3/4) de 0 a 5 puntos y por el cálculo razonado de segunda probabilidad (1/51=0,02) de 0 a 5 puntos.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**SELECTIVIDAD SEPTIEMBRE 2004**

**EJERCICIO A**

**Problema 1**. Obtener la matriz X que verifica AX – B = 3X

siendo:

A =  y B = http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image013.gif

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Un fabricante produce en dos talleres tres modelos distintos de archivadores, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C. Al fabricante le cuesta 720 € al día el funcionamiento del primer taller y 960 € el del segundo. El primer taller produce diariamente 4 archivadores del modelo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el segundo produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para, cumpliendo el contrato, conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento?. ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres?. En caso afirmativo, determinar cuánto.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función C(t)= 60t – 10t2 representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas **t** que lleva abierto el establecimiento. Se pide:

a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.

b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que un 40% ha recibido algún curso de LINUX. Además, el 20% de aquellos que recibieron algún curso de LINUX tienen ordenador en casa. Si un 10% de estudiantes de informática tienen ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, calcular:

a) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa y haya recibido un curso de LINUX.

b) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa.

c) si un estudiante de informática tiene ordenador en casa, la probabilidad de que haya recibido un curso de LINUX.

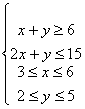
[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**EJERCICIO B**

**Problema 1.** Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 euros a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 euros que paga el menor el mayor paga 3 euros. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 2.** Calcular los puntos de la región definida por



donde la función z = 3x +2y alcanza los valores máximo y mínimo. Calcula dichos valores

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 3.** Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto del papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

**Problema 4.** En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25% de las mujeres son rubias y el 10 % de lso hombres también son rubios. Calcular:

a) Si se elige una persona y resulta rubia, ¿cuál será la probabilidad de que sea mujer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

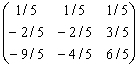
[**Solución**](http://carmesimatematic.webcindario.com/solucion2004.htm)

## CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Todos los problemas valdrán lo mismo. Los criterios se han establecido con la base de que cada problema se puntuará de 0 a 10. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas. En caso de contestación de los cuatro problemas sólo se corregirán los tres primeros que se contesten.

**EJERCICIO A**

**Problema 1.** Si se resuelve como un sistema de ecuaciones, se puntuará de 0 a 3 puntos por plantear correctamente el sistema y de 0 a 7 por la obtención de X=http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image015.gif. Si se resuelve mediante inversión de una matriz, se puntuará de 0 a 4 puntos por el planteamiento, de 0 a 4 puntos por el cálculo de la matriz inversa

de A -3I que es  y de 0 a 2 puntos por la obtención de X.

**Problema 2.** Por el planteamiento de 0 a 4 puntos. Por la determinación de la región factible de vértices (0, 6), (2, 2), (3, 1) y (6, 0) de 0 a 3. Por la solución correcta (3 días el primer taller y 1 el segundo) de 0 a 1; por el cálculo del valor de coste (3120 euros) de 0 a 1 y por el de excedentes (sobran 2 archivadores del modelo A) de 0 a 1. Si la solución se obtiene por cualquier otro método razonado y correcto de 0 a 10 puntos.

**Problema 3.** Por la obtención del número máximo de clientes (90) de 0 a 4 puntos, de 0 a 2 por la justificación de que es un máximo y de 0 a 4 puntos por responder correctamente el apartado b) (entre las 9 y las 10 o entre las 12 y la 1)

**Problema 4.** Por obtener la probabilidad pedida en el apartado a) (0,08) de 0 a 4 puntos; por contestar el apartado b) (0,18) de 0 a 4 puntos y se puntuará de 0 a 2 por dar la respuesta de la probabilidad solicitada en c) (4/9=0,44)

***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II***

**SELECTIVIDAD JUNIO 2003**

EJERCICIO A

**Problema 1.** De la siguiente ecuaciónmatricial:

http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image017.gif   Obtener razonadamente los valores de x, y, z.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 2**.  Una compañía fabrica y vende modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y de  30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y de 10 minutos para el modelo B. Se dispone para el trabajo manual de de 6000 minutos al mes y para el de máquina de 4800 minutos al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 €  y de 10 € para el modelo B, planificar la producción mensual para obtener el máximo beneficio y obtener éste.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 3.** Se cree que el número **y** de unidades vendidas de un cierto producto en función de su precio en euros, **x,** viene dado por **y = 50-x,** donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio de x-10 , determinar de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 4**. En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50% de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70%. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

a) Calcula la probabilidad de que elija una novela

b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela , obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

EJERCICIO B

**Problema 1**. El 75% de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60% de los que utilizan el transporte y el 90% de los que acuden andando. Calcular de forma razonada :

a) si se elige al azar uno de los  alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya llegado andando y

b) si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que n haya llegado puntual.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 2.** Debo tomar al menos 60mg  de vitamina A y al menos 90mg de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir dos pastillas de marcas diferentes X e Y . Cada pastilla de la marca X contiene 10mg de vitamina A y 15mg de vitamina B, y cada pastilla de la marca Y contiene 10mg de cada vitamina. Además no es conveniente tomar más de 8 pastillas diarias. Sabiendo que el precio de cada pastilla de la marca X es 50 céntimos de euro y que cada pastilla de marca Y cuesta 30 céntimos de euro, calcular de forma razonada:

a) cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo.

b) Cuál es el coste mínimo.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 3.** Cinco amigos suelen tomar el café juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café, un cortado y tres cafés con leche, por lo que  pagaron 3, 25 € . Al tercer día solo acudieron cuatro  de ellos, y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2,45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 4.** Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble del cuadrado del segundo sea mínimo.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**SEPTIEMBRE 2003**

EJERCICIO A

**Problema 1.** El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es el doble de la distancia de A y B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad  que B.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 2**. Un a empresa dispone de un máximo de 16.000 unidades de un producto que puede vender en unidades sueltas o en lotes de cuatro unidades. Para empaquetar un lote de cuatro unidades se necesita el triple  de material que para empaquetar una unidad suelta. Si se dispone de material para empaquetar 15.000 unidades sueltas y si el beneficio que se obtiene por la venta de cada unidad suelta es de 2 €  y de cada lote de cuatro unidades es 7 €, calcular de forma razonada el número de unidades sueltas y de lotes de cuatro unidades que hay que preparar para maximizar el beneficio y calcular éste.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 3.**  El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por: http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image018.gif. Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 4**. Un personal tiene cargados dos programas antivirus A1 y A2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A1 lo detecta con una probabilidad de 0,9 y el programa  A2 con una probabilidad de 0,8. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.

b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A1 y no por el A2.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

EJERCICIO B

**Problema 1**. Dados los puntos del plano (1,1) y (3, -2), se pide: a) Encontrar de forma razonada la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos, b) deducir si dicha recta es paralela o si corta a la recta de ecuación 3x+ y =5, y c) en este último caso, calcular el punto de corte.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 2.** Se pretende invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B ha de ser al menos de 3000 € y no se quiere invertir en A más del doble que en B. Se supone que A proporcionará un beneficio del 10% y B del 5%. Si se dispone de 12000 € , calcular de forma razonada cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio y determinar éste.

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 3.** La concentración C de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad durante los 20 primeros días de un determinado mes se puede aproximar por la función C(x)= 90+ 15x-0,6 x2, donde x representa el tiempo transcurrido en días.

a) Estudiar de forma razonada el crecimiento y decrecimiento de la concentración de ozono en relación con los días transcurridos.

b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono durante esos 20 días?. Justificar la respuesta

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

**Problema 4.** El 75% de los jóvenes que tienen video consola ha recibido propaganda de un determinado video juego  y el 25% restante no. El 30% de los que recibieron la propaganda ha utilizado después dicho video juego y también lo ha hecho el 5% de los que no la recibieron. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un joven con video consola seleccionado al azar haya utilizado este videojuego.

b) La probabilidad de que un joven con video consola seleccionado al azar haya recibido propaganda y no hay utilizado el video juego,

[**SOLUCIÓN**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.htm#soluciones)

***Soluciones***

**JUNIO 2003**

**EJERCICIO A**

**Problema 1**

Solución

Si operamos las matrices obtenemos el sistema lineal:

http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image019.gifes decir http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image020.gif, http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image021.gifhttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image022.gif

 que nos da como solución x = -2, y =1, z =2

(**resolver el problema usando el método de Gauss**)

**Problema 2**

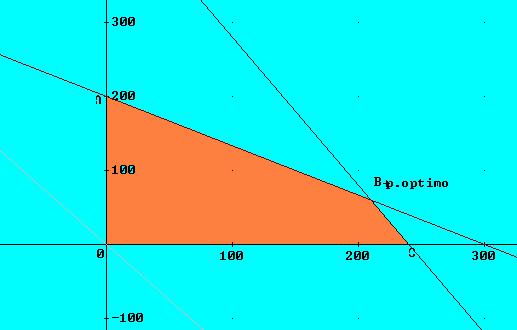
Solución

Es un problema de programación lineal

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **nº** | **Manual** | **Máquina** |
| **A** | x | 20x | 20y |
| **B** | y | 30y | 10y |
|  |  | 6000 | 4800 |

Restricciones

                  función objetivo: Beneficio B = 15x +10y

La región factible                     

Los vértices son A(0, 200), B(210, 60) y C(240, 0) y O(0,0)

Como se ve en la figura, se ha dibujado en rojo la recta 15x +10y=0, al desplazarla sobre la región objetivo el punto más alejado es el B.

Lo comprobamos usando el método analítico:

B(0,200)= 2000, **B(210, 60)= 3750** y B(240, 0)=3600, luego la solución es 210 lámparas del modelo A y 60 del modelo  B.

**Si necesitas teoría** [**pincha aquí**](http://carmesimatematic.webcindario.com/proli.pdf))

**Problema 3**

Solución

El beneficio viene dado por B(x) = (50-x)(x -10),   http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image025.gif

B´(x)= -(x-10)+(50-x)=0, de donde x =30 es un máximo relativo, además es absoluto**,** el número de unidades vendidas a este precio es por tanto y =20 unidades y el beneficio total 400 euros.

**(Justificar las afirmaciones)**

**Problema 4**.

Solución

a) La probabilidad total de que elija una novela:

P(N)= http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image026.gif=http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image027.gif0,5593,  el 55,93%

b) p(B1/N)= http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image028.gif=0,68

**(Resolver el problema usando diagramas de árbol)**

**SEPTIEMBRE 2003**

**EJERCICIO A**

**Problema 1**

Solución

Sea d = distancia de A a B, entonces la distancia de A a C será 2d, y se verifica:

20= k. d + n

32= k.2d + n

Si restamos obtenemos 12 = k. d , de donde k = 12/d y  n = 8

Entonces el precio de un billete que dista de A la mitad que B , es decir d/2 será:

(12/d).(d/2)+8 = 14

**Problema 2**

Solución

Es un problema de programación lineal

Llamamos x al número de lotes con una unidad e y al número de lotes con 4 unidades

Las restricciones son:

1x + 4 y http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image030.gif16000

1x + 3 y http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image030.gif15000

xhttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image031.gifhttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image032.gif 0

y http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image032.gif 0

La función objetivo : B(x, y) = 2 x + 7 y

Los vértices son A(0, 4000), B(12000, 1000) y  C(15000, 0) y el beneficio máximo se alcanza en el B y es de 31000 €(comprobarlo).

**Problema 3**

Solución

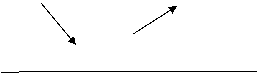
La función coste medio es:

CM (x)=http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image033.gif

Para que el coste medio tenga un mínimo la derivada tiene que ser 0 (la función es derivable en todo su dominio y los límites en 0 e http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image034.gif dan http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image034.gif)

C’M(x)=http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image035.gifhttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image036.gif, x = 40 que corresponde a un mínimo (ver debajo). El valor de dicho coste medio mínimo es http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image033.gif= 20 +5 +20= 45 €

f

  
                  40

f’       \_       mín              +

**Problema 3**

Solución

(Por comodidad  llamamos A1 al “ suceso que el virus sea detectado por el antivirus A1 “, y A2 el “suceso que el virus sea detectado por el antivirus A2”)

a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado es:

p(A1http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image038.gifA2) = p(A1) +p(A2) – p(A1http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image039.gifA2) = 0,9 +0,8 -0,9.0,8 = 0,98 (ya que los antivirus actúan independientemente)

b) p(A1, A´2)= 0,9.0,2= 0,18

**EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD DE AÑOS ANTERIORES**

JUNIO       EJERCICIO A

**Problema 1.** Calcular los determinantes http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image040.gif, http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image041.gif y http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image042.gif. Aplicar los resultados obtenidos para resolver por la regla de Cramer el sistemahttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image043.gif

**Problema 2.** Una fábrica produce lámparas normales a 900 ptas cada una y focos halógenos a 1200 ptas cada uno. La capacidad máxima diaría de fabricación es de 1000, entre  lámparas normales y focos halógenos, si bien, no se pueden fabricar más de 800 lámparas normales ni más de 600 focos halógenos.

Se sabe que la fábrica vende toda la producción. Averiguar de forma razonada cuánta lámparas y cuántos focos ha de producir para obtener la máxima facturación posible y cuál seria ésta.

**Problema 3.** Se calcula que el valor de una acción ***t*** meses después de salir al mercado y durante el primer año viene dado por la función http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image044.gif Explique razonadamente en qué mes conviene comprar las acciones para adquirirlas al precio mas ventajoso.

**Problema 4.** La ciudad A tiene el doble de habitantes que la ciudad B, pero un 30% de ciudadanos de B lee literatura,  mientras que sólo un 10% de ciudadanos da A lee literatura.

a) De un ciudadano se sabe sólo que vive en la ciudad A o en la ciudad B. Calcula de forma razonada que lea literatura.

b) Si nos presentan un ciudadano que vive en la ciudad A o en la ciudad B, pero del cual sabemos que lee literatura, calcula razonadamente la probabilidad de que sea de la ciudad B.

EJERCICIO B

**Problema 1.** Expresa por una integral el área del trapecio de vértices (3,0), (15,0), (15,15) y (3,3) y explica el significado.

**Problema 2** Hemos invertido 4000000 de pesetas en acciones de las empresas A, B y C. Después de un año, la empresa A va a repartir. un beneficio del 6%, la B del 8% y la C del 10%. En total recibimos 324826 ptas.

a) Deduzca razonadamente si se puede averiguar  o no que invertimos en cada empresa.

b) Deduzca razonadamente que invertimos en cada empresa sabiendo que en la empresa C invertimos el doble que en la empresa A.

**Problema 3.** Una industria fabrica bolígrafos que vende .a 400 ptas cada uno y plumas estilográficas que vende a 1200 ptas. cada una. Las máquinas limitan la producción de manera que cada día no se pueden producir mas de 200 bolígrafos ni más de 150 plumas estilográficas, y el total de la producción (bolígrafos mas plumas) no puede superar las 250 unidades. La industria vende siempre toda la producción. Deduzca razonadamente cuántos bolígrafos y plumas estilográficas ha de producir al día para maximizar el beneficio y cuál sería aquel.

**Problema 4.**  La baraja .española consta de diez cartas de oros, diez cartas de copas, diez cartas de espadas y diez cartas de bastos.

Se extraen tres cartas. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas de oros en los siguientes supuestos:

a) No se devuelven las cartas después d la extracción.

b) Después d cada extracción se devuelve la carta a la baraja antes de la extracción siguiente.

**SEPTIEMBRE**         EJERCICIO A

**Problema 1**. En una reunión hay 40 personas. La suma del número de hombres y mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres excede en 6 a la suma del número de hombres mas el número de niños. Averiguar razonadamente cuántos hombres, mujeres y niños hay.

**Problema 2.** Obtener la derivada de la funciónhttp://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image045.gifen el punto de abscisa x = 4. Explicar lo que significa el valor obtenido de la derivada. Calcular la tasa de variación instantánea en el punto de abscisa x = 5.

**Problema 3.** El INSERSO debe organizar un viaje para 800 personas con cierta empresa que dispone de 16 autobuses de 40 plazas cada uno y 20 autobuses de 50 plazas cada uno. El alquiler de un autobús pequeño cuesta 3000 ptas y el alquiler de un autobús grande cuesta 4000ptas.

Averiguar razonadamente cuántos autobuses de cada clase hay que contratar para minimizar el coste y cuál sería el mínimo coste, sabiendo que la empresa solo dispone de 18 conductores.

**Problema 4.** Escribo tres cartas y los tres sobres correspondientes. Introduzco cada carta en un sobre al azar, es decir sin mirar el destinatario. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que haya introducido sólo una carta en el sobre correcto..

EJERCICIO B

**Problema 1.** La función f(x ,y)= 2x +3y está definida en el polígono de vértices (0,0), (6,0), (6,8), (4,12) y (0.15). Determinar de forma razonada todos los puntos en los que la función f alcanza un máximo. Justificar de forma razonada si dicho máximo se alcanza en un solo  punto o no. ¿En qué punto o puntos se alcanza el máximo? ¿Cuál es el valor máximo?

**Problema 2.** Un estudiante obtuvo un 6 en un examen de Matemáticas que constaba de tres preguntas. En la primera pregunta obtuvo una calificación igual al doble de la calificación que obtuvo en la segunda pregunta y en la tercera pregunta obtuvo una calificación igual a la suma de las calificaciones de las otras dos preguntas. Averiguar razonadamente la calificación de cada pregunta.

**Problema 3.** El rendimiento, f(t), en un examen que dura una hora en función del tiempo *t* viene dado por

http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image046.gif,  http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image047.gif

Deducir razonadamente:

a) Cuándo el rendimiento es nulo.

b) Cuándo el rendimiento es máximo.

c) Cuándo el rendimiento es creciente y cuándo es decreciente.

**Problema 4.** La ciudad A tiene el triple de habitantes que la ciudad B. Un 10% de habitantes de la ciudad A son alérgicos y un 30% de habitantes de la ciudad B son alérgicos. Se selecciona un ciudadano sin saber de que ciudad es. Deducir razonadamente cuál es la probabilidad de que sea alérgico.

Entre todos los habitantes alérgicos de ambas ciudades se selecciona un ciudadano. ¿Cuál es la probabilidad de que se de la ciudad A?.

***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES***

**JUNIO        EJERCICIO A**

**Problema 1**. Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:



Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región factible donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y mínimo: a) f(x,y)=2x +3y, b) f(x,y)=y – x

**Problema 2.** Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 euros. Calcular de forma razonada cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que han pagado el billete entero.

**Problema 3.** La velocidad (en m./sg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dado en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión:

f(x)=-0´00055x (x-300)

Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima?¿cuál es ésta velocidad?

b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?

c) ¿A qué velocidad lega a la meta?

**Problema 4.** En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad de tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.

b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B.

EJERCICIO B

**Problema 1.** Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes de tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los de tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 euros por cada paquete que venda de tipo A y 5 euros por cada uno que vende de tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular éste.

**Problema 2.** Los tres vértices de un triángulo son A(0,1), B(1,2) y C(3,0).

a) Encontrar de forma razonada la ecuación de la recta paralela al lado AB que pase por el punto C y

b) Hallar el punto de intersección de esta recta con la recta de ecuación x+3y=2

**Problema 3.** La función   f(t)= 2`1t2+ 0`8 t-1, para http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image049.gif, donde el tiempo, t, viene expresado en años, proporciona los beneficios de una empresa en miles de euros entre los años 1991 (t=0) y 2000  (t =9).

a) Calcular de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de esta empresa en este periodo de tiempo.

b) Obtener de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de los últimos años.

c) ¿Qué podemos concluir acerca de la variación del beneficio en los dos últimos años?

**Problema 4.** Un alumno realiza un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Si el alumno aprueba contestando correctamente dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si escoge las respuestas de cada una de las preguntas completamente al azar.

***Soluciones (en construcción)***

Nota: Si encuentras alguna errata o error te agradecería me lo comunicaras para subsanarlo en sucesivas actualizaciones [http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image050.gif](mailto:carmesi__@hotmail.com)

**Si necesitas más ejercicios resueltos para preparar la selectividad visita otras páginas de esta Web:**

[**Cuaderno de Actividades 2º Bach**](http://carmesimatematic.webcindario.com/objetivossegundo.htm)

[**Ejercicios Modelos de exámenes**](http://actividadesinfor.webcindario.com/ejerciciosmodelo.htm)

[**Ejercicios de Programación lineal**](http://actividadesinfor.webcindario.com/proli.htm)

**Si tienes algún problema que no te sale y te interesa proponlo en el** [**foro**](http://miarroba.com/foros/ver.php?id=356242) **y te ayudamos**

[***Ir a Bachillerato***](http://carmesimatematic.webcindario.com/M.bachillerato.htm)

**SI TIENES PROBLEMAS PARA VISUALIZAR LAS FÓRMULAS BAJATE** [**EL ARCHIVO DOC SELECTIVIDAD 2004**](http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004.doc)

[***Matemáticas para todos***](http://carmesimatematic.webcindario.com/)

[http://carmesimatematic.webcindario.com/selectividad2004_archivos/image051.gif](http://miarroba.com/foros/ver.php?id=356242)

beacon